# Calculo de Incertidumbres

Laboratorio de Física 1, 2020

En este documento sintetizamos las formulas y algunos conceptos relativos a la estimación de incertidumbre. Esa ultima es necesaria para cuantificar la calidad de la medición de un mensurado $x$.

## 1 Estimación directa de incertidumbres

Distinguimos primero las incertidumbres estadísticas $\sigma_{est}$ de las incertidumbres sistemáticas asociadas instrumentos $\sigma_{ins}$ (esta es una simplificación, ya que las incertidumbres sistemáticas también se generan por otros factores involucrados en el proceso de medición, como ser la definición del objeto, errores de paralaje, etc). La forma de incluir las dos incertidumbres independientes en una incertidumbre total $\Delta_x$ de un mensurado $x$ es la siguiente:

$$\Delta_x = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{ins}^2}$$

La incertidumbre estadística requiere repetir la medición una cantidad significativa de veces, obteniendo una serie de datos $x_i$ con $i = 1, .., N$. En el caso de una distribución normal, consideramos el promedio $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$ como la mejor estimación del mensurado y asociamos la desviación estándar a la incertidumbre estadística:

$$\sigma_{est} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$

. Finalmente sintetizamos la medición con $x = \overline{x} \pm \Delta_x$ . Es importante recordar que el resultado tiene que tener sus unidades correspondientes y respetar la cantidad de cifras significativas (en este curso, la convención que usamos es de expresar la incerticumbre con 2 cifras significativas y luego hay que que revisar/ajustar el orden de magnitud correspondiente para el valor del mensurado).

## 2 Estimación por propagación de incertidumbres

Es útil deducir una cantidad $Q$ con alguna función algebraica $Q(X_k)$ de unos mensurados $X$ medidos de forma directa (cuidado, los $X_k$ no represen una serie de datos sino que distintas variables o mensurados, por ejemplo $R$, $m$, $v_{limite}$). A modo de ejemplo podemos estimar una densidad $\rho$ midiendo la masa $m$ y un volumen $V$, en este caso tenemos $k = 1, 2$:

$$Q(X_k) = \rho(m, V) = \frac{m}{V}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} Q = \rho \\ X_1 = m \\ X_2 = V \\ k = 2 \end{cases}$$

(Aquí el subíndice $k$ asignado a cada variable no es relevante.) La forma de relacionar la incertidumbre $\Delta_Q$ de $Q$ con las incertidumbres $\Delta_{X_k}$ de las cantidades $X_k$ (que fueron medidas de forma directa), requiere introducir el concepto de derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial X_k}$, que luego permite introducir ciertos coeficientes de proporcionalidad entre la incertidumbre total $\Delta_Q$ y las incertidumbres $\Delta_{x_i}$ de las variables:

$$\Delta_Q = \sum_k \left| \frac{\partial Q}{\partial X_k} \right| \Delta_{X_k}$$

, con $\left| \frac{\partial Q}{\partial X_k} \right|$ representando el valor absoluto de la derivada parcial de $Q$ respecto de $X_k$, ya que las incertidumbres **siempre se adicionan**. Este factor se puede interpretar como la pendiente local de la curva $Q(X_k)$ (manteniendo $X_i$ constante, $\forall i \neq k$). **El cálculo general de las derivadas parciales no está en el programa del curso de Laboratorio de Física 1.** Sin embargo se pueden deducir una serie de fórmulas para algunos casos simples (**que sí tienen que saber, al menos de la fórmula 1 a la 4**):

1. Multiplicación por constante:

$$Q = aX_1 \qquad \Longrightarrow \Delta_Q = a\Delta_{X_1}$$

2. Suma y resta de variables:

$$Q = X_1 \pm X_2 \qquad \Longrightarrow \Delta_Q = \Delta_{X_1} + \Delta_{X_2}$$

3. Multiplicación y división entre variables independientes[1] ($X_1$ no puede ser una función de $X_2$):

$$Q = X_1 X_2 \quad \text{o} \quad Q = \frac{X_1}{X_2} \qquad \Longrightarrow \frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{\Delta_{X_1}}{X_1} + \frac{\Delta_{X_2}}{X_2}$$

4. De la fórmula para el producto se deduce la fórmula para $X^n$ (con $n > 0$ entero):

$$Q = XX \qquad \Longrightarrow \frac{\Delta_Q}{Q} = 2\frac{\Delta_X}{X} \Longrightarrow \Delta_Q = 2\frac{\Delta_X}{X} Q \Longrightarrow \Delta_Q = 2X\Delta_X$$

[1]Por ejemplo, no puede ser $X_1 = R$ y $X_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$. De todas maneras, estas fórmulas darán una sobreaproximación de la incertidumbre y se podrían considerar como válidas.

$$Q = X^n \qquad \Longrightarrow \frac{\Delta_Q}{Q} = n\frac{\Delta_X}{X}$$

5. Combinando las fórmulas 1 y 2:

$$Q = aX_1 \pm bX_2 \qquad \Longrightarrow \Delta_Q = a\Delta_{X_1} + b\Delta_{X_2}$$

6. Combinando multiplicación por constante, multiplicación o división por variables independientes :

$$Q = aX_1X_2 \quad \text{o} \quad Q = a\frac{X_1}{X_2} \qquad \Longrightarrow \frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{\Delta_{X_1}}{X_1} + \frac{\Delta_{X_2}}{X_2}$$

7. Combinando todas las fórmulas anteriores (considerando $X_1$ y $X_2$ variables independientes):

$$Q = a\frac{X_1}{X_2}(bX_2 \pm cX_3) \qquad \Longrightarrow \frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{\Delta_{X_1}}{X_1} + \frac{\Delta_{X_2}}{X_2} + \frac{\Delta_{bX_2 \pm cX_3}}{bX_2 \pm cX_3}$$

$$\frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{\Delta_{X_1}}{X_1} + \frac{\Delta_{X_2}}{X_2} + \frac{b\Delta_{X_2}}{bX_2 \pm cX_3} + \frac{c\Delta_{X_3}}{bX_2 \pm cX_3}$$