Grupos

Andrés Abella

16 de mayo de 2021

Índice

1. Divisibilidad

En esta sección veremos brevemente algunos conceptos de divisibilidad en $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Proposición 1.1 (División entera)**.** *Dados $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d > 0$, existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = dq + r$ y $0 \leq r < d$. El entero q es el* cociente *y r es el* resto *de* dividir *a por d.*

Dem. Si consideramos $q = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ dn \leq a\}$ y $r = a - dq$, entonces vale $a = dq + r$ y $r \geq 0$. Si fuese $r \geq d$, entonces sería $a = dq + r \geq d(q+1)$ contradiciendo la maximalidad de q; luego es $r < d$. Esto prueba la existencia.
Si hubiesen otros enteros $q', r' \in \mathbb{Z}$ tales que $a = dq' + r'$ y $0 \leq r' < d$, entonces sería $dq + r = dq' + r'$ y por lo tanto $d(q - q') = r' - r$. Tomando valor absoluto obtenemos $d|q - q'| = |r' - r| < d$. Si fuese $q \neq q'$, entonces sería $d|q - q'| \geq d$ lo cual nos lleva a una contradicción. Luego es $q = q'$ lo cual implica $r = r'$. $\square$

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a *divide* a b o que b es *múltiplo* de a, si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$; para indicarlo escribimos $a \mid b$. Un entero a es *primo* si es $a \neq \pm 1$ y $b \mid a$ implica $b = \pm a$ o $b = \pm 1$.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, existe su *máximo común divisor* $d = \mathrm{mcd}(a, b) \in \mathbb{Z}$ que queda caracterizado por las siguientes condiciones

$$d > 0; \quad d \mid a \text{ y } d \mid b; \quad \text{si } c \mid a \text{ y } c \mid b, \text{ entonces } c \mid d.$$

Observaciones 1.2.

1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, vale $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(\pm a, \pm b)$. Esto permite pasar a trabajar con números naturales.

2. Sean a y b enteros tales que $b > 0$. Si $a = bq + r$ es la división entera de a entre b, entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r)$, con $0 \leq r < b$.

3. *Algortimo de Euclides.* Es un método para hallar el máximo común divisor de dos números. Se basa en aplicar reiteradamente la observación anterior.

   Consideremos a y b naturales tales que $a > b > 0$. Sea $a = bq_1 + r_1$ la división entera de a entre b, Si $r_1 > 0$, entonces dividimos b por r_1 obteniendo $b = r_1 q_2 + r_2$. Si $r_2 > 0$, entonces dividimos r_1 por r_2 obteniendo $r_1 = r_2 q_3 + r_3$. Mientras los restos sean no nulos seguimos repitiendo lo anterior, obteniendo

   $$a = bq_1 + r_1, \ b = r_1 q_2 + r_2, \ r_1 = r_2 q_3 + r_3, \cdots; \quad b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > 0.$$

   Observar que vale $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r_1) = \mathrm{mcd}(r_1, r_2) = \cdots$ Como los restos son no negativos y van decreciendo estrictamente, entonces este proceso en algún momento termina; el último resto no nulo es el máximo común divisor de a y b.

4. Sea $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. Aplicando el algoritmo de Euclides obtenemos

   $$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \quad \cdots; \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + d.$$

   Despejando d obtenemos que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $d = ma + nb$; esta es la *identidad de Bézout.*

5. Si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces decimos que a y b son *primos entre sí.* Es fácil de probar que a y b son primos entre sí, si y solo si existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $ma + nb = 1$.

6. Si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$ y escribimos $a' = a/d$ y $b' = b/d$, entonces $\mathrm{mcd}(a', b') = 1$.

7. (*Euclides.*) Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$. Luego si p es primo y $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

Congruencia módulo n. Sea n un entero positivo. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, si n divide a $a-b$, entonces decimos que a y b son *congruentes módulo* n y escribimos $a \equiv b (\text{mód } n)$. Es fácil de probar que la *congruencia módulo* n es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Notar que la clase de equivalencia de un elemento $a \in \mathbb{Z}$ es $\overline{a} = a + n\mathbb{Z} := \{a + nh : \ h \in \mathbb{Z}\}$. Escribimos $\mathbb{Z}_n = \{\overline{a} : \ a \in \mathbb{Z}\}$ al conjunto cociente. Los elementos de $\mathbb{Z}_n$ son los *enteros módulo* n. Usando la división entera se prueba que $\mathbb{Z}_n$ tiene exactamente n elementos y se puede describir mediante

$$\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}.$$

Si $a \equiv a'$ mód n y $b \equiv b'$ mód n, entonces $(a+b) \equiv (a'+b')$ mód n y $(ab) \equiv (a'b')$ mód n. Luego podemos definir una suma y producto en $\mathbb{Z}_n$ mediante $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$ y $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$. El conjunto $\mathbb{Z}_n$ con esas operaciones es un anillo conmutativo, es decir, las operaciones son conmutativas, associativas, el producto es distributivo frente a la suma, $\overline{0}$ es el neutro de la suma, $\overline{1}$ es el neutro del producto y todo elemento $\overline{a}$ tiene un opuesto que es $\overline{-a}$. Una diferencia de $\mathbb{Z}_n$ con $\mathbb{Z}$ es que en general no vale la propiedad cancelativa del producto, por ejemplo en $\mathbb{Z}_6$ es $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0}$, siendo $\overline{2} \neq \overline{0}$ y siendo $\overline{3} \neq \overline{0}$.

2. Grupos

Sea G un conjunto y $* : G \times G \to G$, $(g, f) \mapsto g * f$ una función que llamaremos *producto*[1].

- Un elemento $e \in G$ es un *neutro* para $*$ si verifica $e * g = g * e = g$, para todo $g \in G$.
- El producto $*$ se dice *asociativo* si $g * (f * h) = (g * f) * h$, para todo $g, f, h \in G$.
- Si G tiene un neutro e, entonces $g \in G$ se dice *invertible* si existe $f \in G$ tal que $g * f = f * g = e$.

Observación 2.1. El neutro en caso de existir es único. Si $g \in G$ es invertible y el producto es asociativo entonces el elemento f tal que $g * f = f * g = e$ es único, se escribe $f = g^{-1}$, y se le llama el *inverso* de g.

Un *grupo* es un par $(G, *)$ en la cual G es un conjunto y $G \times G \xrightarrow{*} G$ es un producto, que es asociativo, tiene un neutro y todo elemento de G es invertible. Por simplicidad de notación, en general escribiremos G en vez de $(G, *)$. El *orden* de G es su cardinal que lo escribiremos $|G|$. Diremos que G es *finito* o *infinito* de acuerdo a que $|G|$ lo sea. Para mantener una notación coherente, en general al cardinal de un conjunto X lo escribiremos $|X|$ en vez de $\#X$.

Ejemplos 2.2.

1. Si $\mathbb{Z}$ son los enteros, entonces $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo. Lo mismo sucede cambiando $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_n$, o por un cuerpo arbitrario $\Bbbk$ que puede ser los racionales $\mathbb{Q}$, reales $\mathbb{R}$, complejos $\mathbb{C}$, etc.
2. El conjunto de matrices cuadradas $M_n(\Bbbk)$ con la suma es un grupo.
3. El grupo *trivial* es $G = \{e\}$, en el cual definimos $e * e = e$.

Una forma simple de obtener grupos es mediante monoides. Un *monoide* es lo mismo que un grupo, pero en el cual no se exige que todos sus elementos sean invertibles (luego un grupo es un caso particular de monoide). Si $M = (M, *)$ es un monoide con neutro e y consideramos $M^\times = \{a \in M : \ a \text{ es invertible}\}$, entonces vale

$$e \in M^\times; \quad g, f \in M^\times \ \Rightarrow \ g * f \in M^\times \text{ y } (g * f)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}; \quad g \in M^\times \ \Rightarrow \ g^{-1} \in M^\times \text{ y } \left(g^{-1}\right)^{-1} = g.$$

Luego $M^\times$ es un grupo (con el mismo producto y neutro que M) llamado el *grupo de invertibles* de M. Los siguientes ejemplos se obtienen como grupos de invertibles de ciertos monoides.

[1] En lugar de producto también se usan *operación binaria* y *ley de composición interna*.

Ejemplos 2.3. Los siguientes son ejemplos de grupos.

1. $\Bbbk^\times = \{x \in \Bbbk : \ x \neq 0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ y $\mathbb{Z}_n^\times = \{\overline{a} : \ \mathrm{mcd}(a,n) = 1\}$, con la multiplicación.
   Notar que si p es primo, entonces $\mathbb{Z}_p^\times = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_p : \ \overline{a} \neq \overline{0}\}$; luego $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo.

2. El *grupo general lineal* es $\mathrm{GL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) : \ \det A \neq 0\}$, con el producto de matrices.

3. Si V es un espacio vectorial, entonces a $\mathrm{GL}(V) = \{\varphi : V \to V : \ \varphi \text{ es un isomorfismo lineal}\}$ con la composición también se le llama *grupo general lineal*.

4. Dado $X \neq \emptyset$, el conjunto $\mathrm{Biy}(X) = \{f : X \to X : \ f \text{ es una biyección}\}$, con la composición. Si $X = \{1, \ldots, n\}$, entonces a $\mathcal{S}_n = \mathrm{Biy}(X)$ se le llama el *grupo simétrico* y a sus elementos *permutaciones*. La cantidad de elementos de $\mathcal{S}_n$ es $n!$. Para las permutaciones usaremos la notación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Sea G un grupo. Dos elementos $g, f \in G$ *conmutan* si $g * f = f * g$. Si todos los elementos de G conmutan, entonces el producto se dice *conmutativo* y el grupo se dice *abeliano*. Por ejemplo $\mathbb{Z}$ y $\Bbbk^\times$ son grupos abelianos, mientras que $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ y $\mathcal{S}_n$ (ambos para $n \geq 2$) son grupos no abelianos.

Nota: por simplicidad, de ahora en más en los grupos escribiremos gf en vez de $g * f$ y 1 en vez de e. Si el grupo es abeliano, en general usaremos notación aditiva

$$g * f = g + f, \qquad e = 0, \qquad g^{-1} = -g, \qquad \forall g, f \in G.$$

Por supuesto que esto lo haremos solo en la teoría, en los casos concretos usaremos la notación que corresponda.

Proposición 2.4. *Sea G un grupo.*

1. *Si $g, f, x \in G$, entonces*

$$gx = f \ \Leftrightarrow \ x = g^{-1}f; \quad xg = f \ \Leftrightarrow \ x = fg^{-1}.$$

2. *Si $g \in G$, entonces las funciones de G en G definidas por $x \mapsto gx$ y $x \mapsto xg$, son biyectivas.* □

Si $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos g^n recursivamente mediante

$$g^n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ g^{n-1}g, & n \geq 1. \end{cases}$$

Esta definición se extiende a potencias negativas mediante $g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si G es abeliano y usamos notación aditiva, entonces se escribe ng en vez de g^n.

Proposición 2.5. *Sea G un grupo.*

1. *Si $g \in G$, entonces $g^n g^m = g^{n+m}$, $(g^n)^m = g^{nm}$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.*

2. *Si $g, f \in G$ conmutan, entonces $(gf)^n = g^n f^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.* □

Observación 2.6. La segunda afirmación anterior implica que si $g \in G$, entonces $(g^n)^{-1} = \left(g^{-1}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sea G un grupo. Si $g \in G$, entonces el *orden* de g es $|g| \in \mathbb{Z}^+ \cup \infty$, que está definido por lo siguiente. Si existe $n \neq 0$ tal que $g^n = 1$, entonces $|g| := \min\{n > 0 : \ g^n = 1\}$; en caso contrario $|g| := \infty$.

Proposición 2.7. *Sea $g \in G$ tal que $|g| = n < \infty$. Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces vale $g^k = 1$ si y solo si n divide a k.*

Dem. Si n divide a k, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $k = nq$. Luego $g^k = g^{nq} = (g^n)^q = 1^q = 1$.
Recíprocamente, si vale $g^k = 1$, entonces dividiendo k entre n obtenemos $k = nq + r$, con $0 \leq r < n$. Luego

$$1 = g^k = g^{nq+r} = (g^n)^q \, g^r = g^r,$$

entonces $g^r = 1$ y por la minimalidad de n concluimos que necesariamente es $r = 0$. □

Proposición 2.8. *Sea $g \in G$.*

1. *Si $|g| = \infty$, entonces vale $g^k = 1$ si y solo si $k = 0$, y vale $g^k = g^h$ si y solo si $k = h$.*
2. *Supongamos $|g| = n < \infty$, entonces.*
   a) *Vale $g^k = 1$ si y solo si n divide a k.*
   b) *Vale $g^k = g^h$ si y solo si $k \equiv h \mod n$.*
   c) *Para todo $k \in \mathbb{Z}$ vale que g^k tiene orden finito y $\left|g^k\right| = n/d$, siendo $d = \mathrm{mcd}(n, k)$. En particular, si $k > 0$ y k divide a n, entonces $\left|g^k\right| = n/k$.*

Dem.

1. La primer afirmación es obvia y la segunda se deduce de que $g^k = g^h$ equivale a $g^{k-h} = 1$.
2. *a)* Si n divide a k, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $k = nq$. Luego $g^k = g^{nq} = (g^n)^q = 1^q = 1$. Recíprocamente, si vale $g^k = 1$, entonces dividiendo k entre n obtenemos $k = nq + r$, con $0 \leq r < n$. Luego
   $$1 = g^k = g^{nq+r} = (g^n)^q \, g^r = g^r,$$
   entonces $g^r = 1$ y por la minimalidad de n concluimos que necesariamente es $r = 0$.
   b) Aplicando la parte anterior obtenemos
   $$g^k = g^h \quad \Leftrightarrow \quad g^{k-h} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \mid k - h \quad \Leftrightarrow \quad k \equiv h \mod n.$$
   c) Sean $n' = n/d$ y $k' = k/d$. Por un lado $\left(g^k\right)^{n'} = g^{kn'} = g^{dk'n'} = (g^n)^{k'} = 1$. Esto implica que g^k tiene orden finito y si $s := \left|g^k\right|$ entonces $s \mid n'$. Por otro $1 = \left(g^k\right)^s = g^{ks}$, luego $n \mid ks$ y al ser n' primo con k', deducimos $n' \mid s$. Luego $n' = s$. □

Subgrupos. Un *subgrupo* de un grupo G es un subconjunto $H \subset G$ que verifica

$$1 \in H; \qquad g, f \in H \ \Rightarrow \ gf \in H; \qquad g \in H \Rightarrow g^{-1} \in H,$$

o, equivalentemente, si verifica

$$1 \in H; \qquad g, f \in H \ \Rightarrow \ gf^{-1} \in H.$$

Escribimos $H < G$ para indicar que H es un subgrupo de G. Es claro que la restricción a H del producto de G le da a H estructura de grupo.

Ejemplos 2.9.

1. Dado un grupo G, los subconjuntos $\{1\}$ y G son subgrupos de G. El subgrupo *trivial* es $\{1\}$. Todo subgrupo de G distinto de $\{1\}$ y G se dice que es *propio*.
2. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos $U_n = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1\}$. Es fácil de probar que U_n es un subgrupo de $\mathbb{C}^\times$, para todo $n \geq 1$. Explícitamente es $U_n = \left\{e^{\frac{2k\pi}{n}i} : \ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$.
3. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ y consideremos $U_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty U_n = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\{1\} < U_n < U_\infty < S^1 < \mathbb{C}^\times$, es una cadena de subgrupos multiplicativos, para todo $n \geq 1$.

Grupos de movimientos. Un *movimiento* o *isometría* del plano $\mathbb{R}^2$ es una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la distancia euclídea. Se prueba que los movimientos son funciones biyectivas, y que forman un subgrupo del grupo de $\mathrm{Biy}(\mathbb{R}^2)$, llamado el *grupo de movimientos* del plano, que escribiremos $\mathcal{M}$. Recordar que $\mathcal{M}$ está formado por rotaciones[2] $\rho_{p,\theta}$, traslaciones τ_v, simetrías axiales σ_L y antitraslaciones[3] $\alpha_{v,L}$.

Los movimientos que preservan el sentido del plano se llaman *directos*, y son las rotaciones y las traslaciones. Llamaremos *indirectos* a los movimientos que invierten el sentido, que son las simetrías axiales y antitraslaciones. El conjunto $\mathcal{M}_+$ formado por los movimientos directos es un subgrupo de $\mathcal{M}$.

Si X es un subconjunto del plano, una *simetría* de X es un movimiento φ que verifica $\varphi(X) = X$. El conjunto $\mathrm{Sim}(X)$ de las simetrías de X es un subgrupo de $\mathcal{M}$ llamado el *grupo de simetrías* de X.

El *grupo diedral* D_n es el grupo de simetrías de un polígono regular P_n de n lados. Vamos a describir D_n. Supongamos que p es el centro de P_n y que v_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ son los vértices de P_n (ordenados en sentido antihorario). Sean L_0 la recta que pasa por p y por v_0 y L_k la recta que pasa por p y forma un ángulo (en sentido positivo) de $k\pi/n$ con L_0. Si $\rho_k = \rho_{p,2k\pi/n}$ y $\sigma_k = \sigma_{L_k}$, entonces D_n tiene $2n$ elementos que son

$$D_n = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}, \quad \rho_0 = \mathrm{id}\,.$$

Para probar lo anterior se puede hacer lo siguiente. Por un lado es claro que $\rho_k, \sigma_k \in D_n$, para todo k. Para ver la otra inclusión, consideramos $\alpha \in D_n$ arbitrario. Es facil de probar que α lleva vértices de P_n en vértices de P_n, luego α deja fijo al centro de P_n. Considerando el vértice v_0, va a ser $\alpha(v_0) = v_k$, para algún k. Si α es directo, entonces $\alpha = \rho_k$ y si α es indirecto, entonces $\alpha = \sigma_k$.

Definimos también $D_1 = \{\rho_0, \sigma_0\}$ y $D_2 = \{\rho_0, \rho_1, \sigma_0, \sigma_1\}$, siendo $\rho_0 = \mathrm{id}$, ρ_1 la simetría central de centro p, y σ_0 y σ_1 simetrías axiales de ejes perpendiculares que se cortan en p, siendo p un punto arbitrario del plano. Luego tenemos definido D_n, para todo $n > 0$.

Notar que la propiedades del grupo no dependen de las elecciones de p ni de los vértices v_k. En particular podemos asumir que el origen o es el centro de P_n y que $v_k = \big(\cos(2k\pi/n), \mathrm{sen}(2k\pi/n)\big)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ son los vértices de P_n. Notar que pensando $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, es $v_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, para todo k.

Volvemos a la teoría general.

Proposición 2.10. *Si H_i es un subgrupo de G, para todo $i \in I$, entonces $\bigcap_{i\in I} H_i$ es un subgrupo de G.* □

Si S es un subconjunto de G, entonces el *subgrupo generado* por S es $\langle S\rangle := \bigcap_{S\subset H<G} H$. Notar que $\langle S\rangle$ es el menor subgrupo de G que contiene a S, y se puede describir mediante

$$\langle S\rangle = \left\{ s_1^{n_1} \cdots s_k^{n_k} : \ s_i \in S,\ n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Si $S = \{g_1, \ldots, g_n\}$, escribimos $\langle S\rangle = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$. En particular $\langle g\rangle = \{g^n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es el *subgrupo cíclico* generado por g.

[2] Convenimos que si es $\theta > 0$, entonces el giro se hace en sentido antihorario y si es $\theta < 0$, entonces el giro es horario.

[3] Una *antitraslación* o *simetría con deslizamiento* es la composición de una simetría axial con una traslación de vector paralelo al eje de simetría.

Si $G = \langle S \rangle$, decimos que S *genera* a G o que S es un *conjunto de generadores* de G. El grupo G se dice *finitamente generado* si tiene un conjunto de generadores finito.

Observación 2.11. Todo grupo finito es finitamente generado. El recíproco es falso: $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ y es infinito.

El *grupo de simetrías directas* de un subconjunto X del plano es $\mathrm{Sim}_+(X) := \mathrm{Sim}(X) \cap \mathcal{M}_+$, que es un subgrupo del grupo de simetrías de X.

Ejemplo 2.12. Consideremos el grupo diedral $D_n = \mathrm{Sim}(P_n)$. Si escribimos $\rho = \rho_1$ y $\sigma = \sigma_0$, entonces $\rho_k = \rho^k$ y $\sigma_k = \rho^k\sigma$, para todo k. Luego $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$ y podemos escribir

$$D_n = \left\{ \mathrm{id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma \right\}.$$

Notar $\mathrm{Sim}_+(P_n) = \langle \rho \rangle = \{\mathrm{id}, \rho, \ldots, \rho^{n-1}\}$, que es un subgrupo cíclico de D_n. Escribiremos $C_n = \langle \rho \rangle$.

Generadores y relaciones. Los generadores ρ y σ del grupo diedral D_n verifican

$$\rho^n = \sigma^2 = \mathrm{id}, \quad \rho\sigma = \sigma\rho^{n-1}. \tag{1}$$

Notar $\rho^{n-1} = \rho^{-1}$. Las fórmulas (1) determinan el producto del grupo. Por ejemplo de las mismas se deducen las "reglas de conmutación" entre σ y las potencias de ρ

$$\rho\sigma = \sigma\rho^{n-1}, \quad \rho^2\sigma = \sigma\rho^{n-2}, \quad \cdots, \quad \rho^{n-1}\sigma = \sigma\rho.$$

Esto implica que D_n también se puede describir mediante

$$D_n = \left\{ \mathrm{id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \ldots, \sigma\rho^{n-1} \right\}. \tag{2}$$

También nos permiten calcular el producto de los elementos de D_n, mediante las fórmulas siguientes

$$\rho^i\rho^j = \rho^{i+j}, \quad \left(\sigma\rho^i\right)\rho^j = \sigma\rho^{i+j}, \quad \rho^i\left(\sigma\rho^j\right) = \sigma\rho^{j-i}, \quad \left(\sigma\rho^i\right)\left(\sigma\rho^j\right) = \rho^{j-i}.$$

Además las relaciones (1) son minimales, en el sentido de que ninguna relación se deduce de las otras.
Si G es un grupo que está generado por dos elementos a, b, tales que para cierto $n > 0$ vale $a^n = 1$, $a^l \neq 1$ si $1 \leq l < n$, $b^2 = 1$, $b \neq 1$ y $ab = ba^{n-1}$, entonces identificando a con ρ y b con σ, obtenemos que G se identifica con el grupo diedral D_n (son isomorfos en el sentido que definiremos más adelante). Luego a los grupos de este tipo les llamaremos *diedrales*. En ese caso escribimos $D_n = \langle a, b : \ a^n = b^2 = 1, \ ab = ba^{n-1} \rangle$ y decimos que la anterior es una *presentación* de D_n dada por *generadores y relaciones*. Esta es una forma simple de describir un grupo y se usa frecuentemente[4].

Si $H < G$ y $K < G$, definimos el *subgrupo generado* por H y K mediante $H \vee K = \langle H \cup K \rangle$; es el menor subgrupo de G que contiene a H y K. Explícitamente

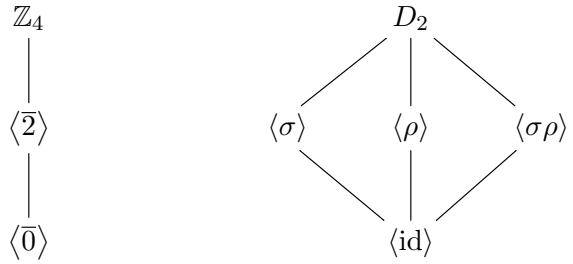
$$H \vee K = \left\{ g_1 \cdots g_n : \ g_i \in H \cup K, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Esta definición se generaliza naturalmente para toda familia arbitraria de subgrupos de G.

Observación 2.13. El conjunto de los subgrupos de un grupo forma un *retículo completo* respecto al orden de inclusión, es decir es un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo. En particular el supremo de $\{H, K\}$ es $H \vee K$ y el ínfimo es $H \cap K$.

[4]Todo esto se puede formalizar bien introduciendo los *grupos libres*, pero por falta de tiempo no lo haremos.

Ejemplo 2.14. Los retículos de subgrupos de $\mathbb{Z}_4$ y $D_2 = \{\mathrm{id}, \rho, \sigma, \sigma\rho\}$ son



En la representación de arriba las líneas verticales marcan las inclusiones.

Si bien el principal objetivo de estas notas son los grupos finitos, una pregunta natural es ¿cómo son los subgrupos de $\mathbb{R}$ (pensado como grupo con la suma)? El siguiente resultado va en esa dirección.

Teorema 2.15. *Si G es un subgrupo de $\mathbb{R}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $G = \mathbb{Z}\alpha$ o G es denso en $\mathbb{R}$.*

Dem. Si $G = \{0\}$ el resultado es obvio tomando $\alpha = 0$. De aquí en más suponemos que este no es el caso. Sea $\alpha = \text{ínf}\{|x| : \ x \in G, \ x \neq 0\}$. Una posibilidad es $\alpha = \text{mín}\{|x| : \ x \in G, \ x \neq 0\}$, aquí $\alpha > 0$. Dado $x \in G$, podemos escribir $x = n\alpha + y$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq y < \alpha$. Luego $y = x - n\alpha \in G$ y si fuese $y > 0$ llegaríamos a una contradicción; luego es $y = 0$ y $x = n\alpha$. Esto prueba $G = \mathbb{Z}\alpha$.
La otra posibilidad es $\alpha \notin \{|x| : \ x \in G, \ x \neq 0\}$. En este caso probaremos que dados $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces siempre existe $g \in G$ tal que $a < g < b$. Sea $\epsilon = b - a > 0$. Por nuestra asunción sobre α, sabemos que existen $y, z \in G$ tales que $\alpha < y < z < \alpha + \epsilon$, luego $x := z - y \in G$ y $0 < x < \epsilon$. Luego es fácil de probar que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a < mx < a + \epsilon = b$. Así $g = mx \in G$ y $a < g < b$. □

Morfismos. Una función entre dos grupos $\varphi : G_1 \to G_2$ se dice un *morfismo* u *homomorfismo* de grupos si verifica $\varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f)$, para todo $g, f \in G_1$.

Proposición 2.16. *Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un morfismo, entonces*

1. *$\varphi(1) = 1$ y $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$, para todo $g \in G_1$.*
2. *$\varphi\left(g^n\right) = \varphi(g)^n$, para todo $g \in G_1$ y $n \in \mathbb{Z}$.* □

Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un morfismo, entonces su *núcleo* es $\mathrm{Ker}\,(\varphi) := \{g \in G_1 : \ \varphi(g) = 1\}$ y su *imagen* es $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(G_1) := \{\varphi(g) : \ g \in G_1\}$. Claramente es $\mathrm{Ker}\,(\varphi) < G_1$ y $\mathrm{Im}(\varphi) < G_2$.

Ejemplo 2.17. Sea $SL_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) : \det A = 1\}$. Notar que $\det : GL_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$ es un morfismo y $SL_n(\Bbbk) = \mathrm{Ker}\,(\det)$, luego $SL_n(\Bbbk)$ es un subgrupo de $GL_n(\Bbbk)$ llamado el *grupo especial lineal*.

Proposición 2.18. *Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un morfismo. Si $H < G_1$, entonces $\varphi(H) < G_2$. Si $K < G_2$, entonces* $\mathrm{Ker}\,(\varphi) < \varphi^{-1}(K) < G_1$. □

A continuación veremos algunos nombres y notaciones. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un morfismo.

- φ es un *monomorfismo* si es inyectivo. Notación: $\varphi : G_1 \rightarrowtail G_2$.
- φ es un *epimorfismo* si es sobreyectivo. Notación: $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2$.
- φ es un *isomorfismo* si es biyectivo. Notación: $\varphi : G_1 \xrightarrow{\simeq} G_2$.
- φ es un *endomorfismo* si $G_1 = G_2$.

- φ es un *automorfismo* si es un endomorfismo biyectivo.

Proposición 2.19. *Propiedades:*

1. *Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un morfismo, entonces φ es un monomorfismo si y solo si* $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{1\}$.
2. *Si $\varphi : G_1 \to G_2$ y $\psi : G_2 \to G_3$ son morfismos, entonces $\psi \circ \varphi : G_1 \to G_3$ es un morfismo.*
3. *Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un isomorfismo, entonces $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ es un isomorfismo.* □

Decimos que dos grupos G_1 y G_2 son *isomorfos* y escribimos $G_1 \simeq G_2$ si existe un isomorfismo $\varphi : G_1 \to G_2$. Los grupos isomorfos tienen las mismas propiedades y por lo tanto son indistinguibles como grupos.
Es claro que la relación "ser isomorfos" es de equivalencia. Si G es un grupo y definimos

$$\operatorname{End}(G) = \{\varphi : G \to G : \ \varphi \text{ endomorfismo}\}, \qquad \operatorname{Aut}(G) = \{\varphi : G \to G : \ \varphi \text{ automorfismo}\},$$

entonces $\operatorname{End}(G)$ es un monoide con la composición y $\operatorname{Aut}(G)$ es su grupo de invertibles.

Ejemplos 2.20.

1. Si G_1 y G_2 son grupos, entonces el mapa constante $\varphi : G_1 \to G_2$ definido por $\varphi(g) = 1$, para todo $g \in G_1$, es un morfismo llamado el *morfismo trivial*.
2. Si H es un subgrupo de G, entonces la inclusión $H \hookrightarrow G$ es un monomorfismo.
3. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, la proyección canónica $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ definida por $\pi(x) = \overline{x}$, es un epimorfismo.
4. Si $g \in G$, entonces $\operatorname{int}_g : G \to G$ definido por $\operatorname{int}_g(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$, es un automorfismo. Los automorfismos de la forma int_g se llaman automorfismos *internos*.
5. Si G es abeliano, entonces $\varphi : G \to G$ definido por $\varphi(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$, es un automorfismo.
6. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita n y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces la correspondencia $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo de $\operatorname{GL}(V)$ en $\operatorname{GL}_n(\Bbbk)$. Por esto es que se llaman igual.
7. El mapa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definido por $\varphi(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es un isomorfismo ($\mathbb{R}^+$ con el producto).

Producto directo. Sean G_1 y G_2 dos grupos. En el producto cartesiano $G_1 \times G_2$ definimos un producto mediante

$$(g_1, g_2) \cdot (f_1, f_2) = (g_1 f_1,\ g_2 f_2), \qquad \forall\ g_1, f_1 \in G_1,\ g_2, f_2 \in G_2.$$

Es fácil de probar que $G_1 \times G_2$ con este producto es un grupo, siendo $(1, 1)$ el neutro y $(g, f)^{-1} = \left(g^{-1}, f^{-1}\right)$. Al conjunto $G_1 \times G_2$ con esta estructura de grupo le llamamos el *producto directo* de G_1 y G_2.

Consideremos $\iota_1 : G_1 \to G_1 \times G_2$, $\iota_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$, $\rho_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ y $\rho_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$, definidos por

$$\iota_1(g_1) = (g_1, 1), \quad \iota_2(g_2) = (1, g_2), \quad \rho_1(g_1, g_2) = g_1, \quad \rho_2(g_1, g_2) = g_2, \quad \forall\ g_1, f_1 \in G_1,\ g_2, f_2 \in G_2.$$

Entonces ι_1 y ι_2 son monomorfismos, ρ_1 y ρ_2 son epimorfismos, y valen $\rho_1 \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{G_1}$ y $\rho_2 \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{G_2}$.
El morfismo $\iota_1 : G_1 \to G_1 \times G_2$ es la *inclusión* de G_1 en $G_1 \times G_2$ y $\rho_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ es la *proyección* de $G_1 \times G_2$ sobre G_1; lo mismo se define para G_2.

Si G_1 y G_2 son grupos abelianos y usamos notación aditiva, entonces el producto directo $G_1 \times G_2$ se suele escribir $G_1 \oplus G_2$ y con esa notación se le llama la *suma directa*.

Es claro que la estructura de producto directo se generaliza naturalmente para productos finitos $G_1 \times \cdots \times G_n$ y en general para productos cartesianos de familias arbitrarias de grupos.

3. Grupos cíclicos

Un grupo G se dice *cíclico* si existe $g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle = \{g^n : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Notar que todo grupo cíclico es abeliano.

Ejemplo 3.1. Los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ son cíclicos y están generados respectivamente por 1 y $\overline{1}$. Notar que $1 \in \mathbb{Z}$ tiene orden infinito mientras que $\overline{1} \in \mathbb{Z}_n$ tiene orden n.

Proposición 3.2. *Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico.*

1. *Si $|g| = \infty$, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.*
2. *Si $|g| = n < \infty$, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_n$.*

Luego el orden del grupo G coincide con el orden del generador g.

Dem. Los mapas $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ y $\psi : \mathbb{Z}_n \to G$ definidos respectivamente por $\varphi(n) = g^n$ y $\psi(\overline{m}) = g^m$, son isomorfismos. Notar que ψ está bien definido por la parte 2b) de la proposición 2.8. □

Observación 3.3. Si $G = \langle g \rangle$ es un grupo cíclico finito de orden n, entonces

1. $G = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ y $g^n = 1$;
2. vale $g^m = 1 \ \Leftrightarrow \ n|m$;
3. vale $g^r = g^s \ \Leftrightarrow \ r \equiv s \mod n \ \Leftrightarrow \ \overline{r} = \overline{s}$ en $\mathbb{Z}_n$.

Corolario 3.4. *Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico.*

1. *Si $|G| = \infty$, entonces los generadores de G son g y g^{-1}.*
2. *Si $|G| = n < \infty$, entonces g^k genera a G si y solo si* $\operatorname{mcd}(k, n) = 1$.

Dem. Sea $g^k \in G$. Notar que $G = \langle g^k \rangle$ si y solo si $g \in \langle g^k \rangle$, lo cual equivale a que exista $m \in \mathbb{Z}$ tal que $g = g^{mk}$. Si $|G| = \infty$, entonces $g = g^{mk}$ equivale a $mk = 1$; esto ocurre si y solo si $k = \pm 1$.
Si $|G| = n < \infty$, entonces $g = g^{mk}$ equivale a $mk \equiv 1 \mod n$, que a su vez equivale a que exista $a \in \mathbb{Z}$ tal que $mk = 1 + an$. Esto ocurre si y solo si $\operatorname{mcd}(k, n) = 1$ (observación 1.2, parte 5). □

Ejemplo 3.5. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $U_n = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1\}$. Si $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, entonces $U_n = \langle \zeta \rangle = \left\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}\right\}$ y vale $\zeta^n = 1$. Notar $|U_n| = n$. Los generadores de U_n son los elementos de la forma $\zeta^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, con $\operatorname{mcd}(k, n) = 1$; estos generadores se llaman las *raíces primitivas* de orden n de la unidad.

El siguiente resultado muestra cómo son los subgrupos de los grupos cíclicos.

Proposición 3.6. *Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico y H un subgrupo no trivial de G. Entonces.*

1. *El subgrupo H es cíclico; explícitamente $H = \langle g^m \rangle$, siendo $m = \min\{l \in \mathbb{Z}^+ : \ g^l \in H\}$.*
2. *Si $|G| = \infty$, entonces $H \simeq G$.*
3. *Si $|G| = n < \infty$, entonces m divide a n y $|H| = n/m$.*

Dem.

1. Sea $m = \min\{l \in \mathbb{Z}^+ : \ g^l \in H\}$. Si $x = g^l \in H$, entonces dividiendo l por m obtenemos $l = mq + r$, con $0 \leq r < m$. Luego de $g^l = (g^m)^q g^r$ deducimos $g^r \in H$ y por lo tanto $r = 0$. Esto implica $H = \langle g^m \rangle$.

2. Como es $|g| = \infty$ y $m > 0$, entonces necesariamente es $|g^m| = \infty$; luego $H = \langle g^m \rangle \simeq \mathbb{Z} \simeq G$.

3. Sea $n = mq + r$ con $0 \leq r < m$ la división entera de n entre m. Entonces

$$1 = g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q g^r \quad \Rightarrow \quad g^r = (g^m)^{-q} \in H.$$

La minimalidad de m implica $r = 0$; luego m divide a n y por lo tanto $|H| = |g^m| = n/m$. □

Observación 3.7. Si $G = \langle g \rangle$ es de orden n, entonces para cada divisor k de n existe un único subgrupo $H \subset G$ de orden k, que es $H = \langle g^{n/k} \rangle$. Luego tenemos una correspondencia uno a uno entre los divisores de n y los subgrupos de G.

Aplicación 3.8. Todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es de la forma $m\mathbb{Z} = \{ma : \ a \in \mathbb{Z}\}$, con $m \geq 0$. Todo subgrupo de $\mathbb{Z}_n$ es de la forma $\overline{m}\mathbb{Z}_n = \{\overline{ma} : \ a \in \mathbb{Z}\}$, con $1 \leq m \leq n$ y $m|n$; además $|\overline{m}\mathbb{Z}_n| = n/m$.

A continuación usamos la proposición 2.8 para determinar los morfismos de un grupo cíclico en un grupo arbitrario.

Proposición 3.9. *Sea G un grupo cíclico y F un grupo arbitrario.*

1. *Si $|G| = \infty$, entonces hay una correspondencia uno a uno entre los morfismos de G en F y los elementos de F.*

2. *Si $|G| = n < \infty$, entonces hay una correspondencia uno a uno entre los morfismos de G en F y los elementos $f \in F$ tales que $f^n = 1$.*

Dem. Sea $G = \langle g \rangle = \{g^k : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Observar que todo morfismo $\varphi : G \to F$ verifica $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego si existe un morfismo $\varphi : G \to F$, entonces φ es de la forma

$$\varphi(g^k) = f^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

siendo $f = \varphi(g)$. Luego a cada morfismo φ le corresponde un único elemento $f = \varphi(g)$ que verifica (3).

Si $|G| = \infty$, entonces vale $g^k = g^h$ si y solo si $k = h$. Luego cada $f \in F$ permite definir una función $\varphi : G \to F$ mediante la fórmula (3). Notar que esa función es un morfismo

$$\varphi\big(g^h g^k\big) = \varphi\big(g^{h+k}\big) = f^{h+k} = f^h f^k = \varphi\big(g^h\big)\varphi\big(g^k\big), \quad \forall h, k \in \mathbb{Z}.$$

Sea ahora $|G| = n < \infty$. Supongamos que tenemos un elemento $f \in F$ y queremos definir un morfismo $\varphi : G \to F$ mediante la fórmula (3). Si eso es posible, entonces $f^n = \varphi(g^n) = \varphi(1) = 1$, luego $f^n = 1$. Recíprocamente, sea $f \in F$ tal que $f^n = 1$. Si $k, h \in \mathbb{Z}$ son tales que $g^k = g^h$, entonces $n|k-h$ y por lo tanto existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $k = h + an$. Luego $f^k = f^{h+an} = f^h (f^n)^a = f^h$. Así que si $f^n = 1$, entonces $g^k = g^h$ implica $f^k = f^h$. Luego en este caso tiene sentido definir una función $\varphi : G \to F$ mediante la fórmula (3), y la misma cuenta de antes nos prueba que φ es morfismo. □

Observación 3.10. Los grupos cíclicos infinitos son isomorfos a $\mathbb{Z}$ y los grupos cíclicos finitos de orden n son isomorfos a $\mathbb{Z}_n$. Así que, a menos de isomorfismo, hay un solo grupo de cada tipo. En general a los grupos cíclicos finitos de n elementos los escribiremos C_n y usaremos C_∞ para los grupos cíclicos infinitos. Son de la forma $C_n = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ con $g^n = 1$ y $C_\infty = \{g^m : \ m \in \mathbb{Z}\}$.

4. Coclases

Sea G un grupo y H un subgrupo. Definimos una relación en G llamada *congruencia módulo* H, que escribimos $\equiv$ (mód H), mediante

$$g \equiv f (\text{mód } H) \qquad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \qquad \exists\, h \in H :\ g = fh \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}g \in H.$$

Esta relación es de equivalencia. La clase de equivalencia de $g \in G$ es

$$\overline{g} := \{f \in G :\ f \equiv g (\text{mód } H)\} = \{gh :\ h \in H\} =: gH.$$

El conjunto gH es la *coclase izquierda* de g respecto a H. Escribimos $G/H = \{gH :\ g \in G\}$.

También podemos definir otra relación de equivalencia $\equiv_d$ (mód H), mediante

$$g \equiv_d f (\text{mód } H) \qquad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \qquad \exists\, h \in H :\ g = hf \qquad \Leftrightarrow \qquad gf^{-1} \in H.$$

Si $g \in G$, su clase de equivalencia es

$$\{f \in G :\ f \equiv_d g (\text{mód } H)\} = \{hg :\ h \in H\} =: Hg.$$

El conjunto Hg se llama la *coclase derecha* de g respecto a H y escribimos $H\backslash G = \{Hg :\ g \in G\}$.

Observación 4.1. Si definimos un nuevo producto $\star$ en G mediante $a \star b := ba$, entonces el par $G^{\text{op}} = (G, \star)$ es un grupo llamado el *grupo opuesto* de G y la relación $\equiv_d$ (mód H) en G coincide con $\equiv$ (mód H) en G^{op}. Obviamente, si G es abeliano, entonces $G = G^{\text{op}}$ y ambas relaciones coinciden. Pero si G no es abeliano, entonces pueden haber subgrupos H de G tales que ambas congruencias coincidan; por ejemplo, esto siempre sucede para $H = G$ o $H = \{1\}$.

Ejemplo 4.2. Consideremos el grupo diedral D_3, que se puede describir mediante

$$D_3 = \left\{1, b, b^2, a, ab, ab^2\right\},\ b^3 = a^2 = 1,\ ba = ab^2,\ b^2a = ab.$$

Sea $H = \langle a \rangle = \{1, a\}$. Las coclases izquierdas de H son

$$1H = aH = H, \quad bH = ab^2H = \left\{b, ab^2\right\}, \quad b^2H = abH = \left\{b^2, ab\right\}, \qquad G/H = \left\{H, bH, b^2H\right\}.$$

Las coclases derechas de H son

$$H1 = Ha = H, \quad Hb = Hab = \{b, ab\}, \quad Hb^2 = Hab^2 = \left\{b^2, ab^2\right\}, \qquad H\backslash G = \left\{H, Hb, Hb^2\right\}.$$

Notar $bH \neq Hb$, $Hb^2 \neq b^2H$ y $G/H \neq H\backslash G$.

Consideremos ahora el subgrupo $K = \langle b \rangle = \{1, b, b^2\}$. En este caso vale $aK = Ka$ y $G/K = K\backslash G = \{K, aK\}$. Luego las coclases izquierdas y derechas pueden coincidir o no, dependiendo del subgrupo.

Proposición 4.3. *Sea G un grupo y H un subgrupo. Entonces*

$$|gH| = |Hg| = |H|,\ \forall g \in G; \qquad |G/H| = |H\backslash G|.$$

Dem. Los mapas $H \to gH$ y $H \to Hg$ definidos respectivamente por $h \mapsto gh$ y $h \mapsto hg$ son biyectivos; esto implica la primer afirmación. Para la segunda, observar que vale

$$gH = fH \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}g \in H \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}\left(g^{-1}\right)^{-1} \in H \qquad \Leftrightarrow \qquad Hf^{-1} = Hg^{-1}, \quad \forall g, f \in H.$$

Luego tiene sentido definir un mapa $\varphi : G/H \to H\backslash G$ por $\varphi(gH) = Hg^{-1}$ y este mapa es inyectivo. Notar $\varphi(g^{-1}H) = Hg$, luego φ también es sobreyectivo, y por lo tanto es biyectivo. $\square$

Si H es un subgrupo de G, llamamos *índice* de H en G a $[G:H] := |G/H| = |H\backslash G|$.

Observación 4.4. Si $H = G$, entonces $G/G = \{G\}$, luego $[G:G] = 1$. Si $H = \{1\}$, entonces el mapa $G \to G/H$ definido por $g \mapsto g\{1\} = \{g\}$ es biyectivo, luego $[G:\{1\}] = |G|$.

Teorema 4.5 (Lagrange)**.** *Sea G un grupo y H un subgrupo. Entonces $|G| < \infty$ si y solo si $|H| < \infty$ y $[G:H] < \infty$. En ese caso vale*

$$|G| = [G:H]|H|.$$

Dem. El directo es claro. Para el recíproco, supongamos $|H| < \infty$ y $[G:H] < \infty$. Sea $n = [G:H]$, entonces existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $G/H = \{g_1H, \dots, g_nH\}$. Luego[5] $G = \bigsqcup_{i=1}^n g_iH$ y por lo tanto

$$|G| = \sum_{i=1}^n |g_iH| = \sum_{i=1}^n |H| = n|H| = [G:H]|H|. \quad \square$$

Observación 4.6. Si G es un grupo finito y H es un subgrupo, entonces el teorema de Lagrange implica que $|H|$ y $[G:H]$ dividen a $|G|$, y $[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$.

Corolario 4.7. *Si G es un grupo finito y $g \in G$, entonces $|g|$ divide a $|G|$ y por lo tanto $g^{|G|} = 1$.*

Dem. Como $\langle g \rangle$ es un subgrupo de G, entonces $|g| = |\langle g \rangle|$ divide a $|G|$. Esto implica la última afirmación. $\square$

Aplicación 4.8. Si G es un grupo finito de orden primo p, entonces G es cíclico. Esto se debe a que si $1 \neq g \in G$, entonces es $1 \neq |g| \mid p$. Luego $|g| = p$ y por lo tanto $G = \langle g \rangle$.

Observación 4.9. Es un ejercicio el probar que si un grupo tiene orden 4, entonces es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Luego usando la aplicación anterior deducimos que todos los grupos de orden menor o igual que 5 son abelianos. Notar que el grupo diedral D_3 tienen orden 6 y no es abeliano.

El siguiente resultado generaliza el teorema de Lagrange.

Teorema 4.10. *Sea G un grupo y H, K subgrupos tales que $K \subset H$. Entonces $[G:K] < \infty$ si y solo si $[G:H] < \infty$ y $[H:K] < \infty$; en este caso vale*

$$[G:K] = [G:H][H:K].$$

Dem. Supongamos $[G:H] = n < \infty$ y $[H:K] = m < \infty$. Luego existen $g_1, \dots, g_n \in G$ y $h_1, \dots, h_m \in H$ tales que $G = \bigsqcup_{i=1}^n g_iH$ y $H = \bigsqcup_{j=1}^m h_jK$. Luego

$$G = \bigcup_{i=1}^n g_iH = \bigcup_{i=1}^n g_i \left(\bigcup_{j=1}^m h_jK \right) = \bigcup_{i=j=1}^{n,m} g_ih_jK.$$

Vamos a probar que esa unión es disjunta. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 tales que $g_{i_1}h_{j_1}K \cap g_{i_2}h_{j_2}K \neq \emptyset$. Como son coclases (son clases de equivalencia), esto implica $g_{i_1}h_{j_1}K = g_{i_2}h_{j_2}K$. Luego existe $k \in K$ tal que $g_{i_1}h_{j_1} = g_{i_2}h_{j_2}k$. Como h_{j_1}, h_{j_2}, k están en H, esto implica $g_{i_1}H = g_{i_2}H$ y por lo tanto $g_{i_1} = g_{i_2}$ (dado que $G = \bigsqcup_{i=1}^n g_iH$). Luego cancelando en $g_{i_1}h_{j_1} = g_{i_2}h_{j_2}k$ deducimos $h_{j_1} = h_{j_2}k$. Pero esta última relación implica $h_{j_1}K = h_{j_2}K$ y por lo mismo que antes es $h_{j_1} = h_{j_2}$. Luego probamos que es $G = \bigsqcup_{i=j=1}^{n,m} g_ih_jK$. Como los g_ih_jK son coclases de K respecto a G, esta igualdad nos dice que es $[G:K] = nm = [G:H][H:K]$. Notar que el razonamiento anterior no requiere que n y m sean finitos; luego si $[G:H] = \infty$ o $[H:K] = \infty$, entonces $[G:K] = \infty$. $\square$

[5] Estamos usando $\bigsqcup$ para indicar que la unión es disjunta.

5. Acciones

Sea G un grupo y X un conjunto. Una *acción* de G en X es una función $G \times X \dot{\to} X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, que verifica

$$1 \cdot x = x, \qquad g \cdot (f \cdot x) = (gf) \cdot x, \qquad \forall\ g, f \in G,\ x \in X.$$

Un *G-conjunto* es un par $(X, \cdot)$ en el cual X es un conjunto y $G \times X \dot{\to} X$ es una acción de G en X.

Ejemplo 5.1.

1. Dado un grupo G, todo conjunto X es un G-conjunto definiendo $g \cdot x = x$, para todo $g \in G$, $x \in X$. Esta es la acción *trivial* de G en X.
2. Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, entonces $\mathrm{Biy}(X)$ actúa en X mediante la evaluación $\varphi \cdot x = \varphi(x)$.
3. $\mathcal{S}_n$ actúa en $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ mediante $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.
4. $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actúa en $\Bbbk^n$ por multiplicación.
5. Si M es un monoide y G es su grupo de invertibles, entonces hay dos acciones naturales de G en M. La acción por *por traslaciones a la izquierda* es $g \cdot m = gm$ y la *acción por conjugación* $g \cdot m = gmg^{-1}$. Un ejemplo de la segunda es $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actuando en $M_n(\Bbbk)$ mediante $A \cdot X = AXA^{-1}$.

   Como un caso particular, G actúa sobre si mismo por traslaciones a la izquierda y por conjugación. Esta última la veremos en más detalle un poco más adelante.
6. Si M es una variedad y $f : M \to M$ es un difeomorfismo, entonces $\mathbb{Z}$ actúa en M mediante $n \cdot p = f^n(p)$. Este tipo de acciones son las que se estudian en los *sistemas dinámicos*.

Observación 5.2. La acciones que definimos anteriormente son *acciones a la izquierda*. Una *acción a la derecha* de un grupo G en un conjunto X es una función $X \times G \overset{\bullet}{\to} X$, $(x, g) \mapsto x \bullet g$, que verifica

$$x \bullet 1 = x, \qquad (x \bullet g) \bullet f = x \bullet (gf), \qquad \forall\ g, f \in G,\ x \in X.$$

Por ejemplo, en las matrices $M_{m,n}(\Bbbk)$ tenemos que $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ actúa por multiplicación a la izquierda mientras que $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actúa por multiplicación a la derecha.

Es equivalente tener una acción a la derecha a tener una acción a la izquierda, pasando de una a la otra mediante $g \cdot x = x \bullet g^{-1}$. Esto permite trabajar solo con acciones a la izquierda, que es lo que haremos.

Proposición 5.3. *Sea G un grupo y X un conjunto. Existe una correspondencia uno a uno entre las acciones de G en X y los morfismos de grupos de G en* $\mathrm{Biy}(X)$*:*

$$G \times X \dot{\to} X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x \qquad \Leftrightarrow \qquad G \overset{\alpha}{\to} \mathrm{Biy}(X),\ g \mapsto \alpha_g : X \to X, \tag{4}$$

definiendo $\alpha_g(x) = g \cdot x$, para todo $g \in G$, $x \in X$.

Dem. Es claro que la correspondencia definida en (4) es uno a uno entre las funciones $G \times X \dot{\to} X$ y las funciones $\alpha : G \to \mathrm{Fun}(X)$, siendo $\mathrm{Fun}(X) = X^X$ el conjunto de las funciones de X en X.
Si $G \times X \dot{\to} X$ es una acción, entonces

$$\alpha_1(x) = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \mathrm{id};$$
$$(\alpha_g \circ \alpha_f)(x) = g \cdot (f \cdot x) = (gf) \cdot x = \alpha_{gf}(x), \quad \forall\ g, f \in G,\ x \in X \quad \Rightarrow \quad \alpha_g \circ \alpha_f = \alpha_{gf}, \quad \forall g, f \in G.$$

De estas dos fórmulas deducimos

$$\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{gg^{-1}} = \alpha_1 = \mathrm{id}, \quad \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = \alpha_{g^{-1}g} = \alpha_1 = \mathrm{id}, \quad \forall g \in G.$$

Esto implica que $\alpha_g : X \to X$ es invertible con inversa $\alpha_{g^{-1}}$. Por lo tanto podemos pensar $\alpha : G \to \mathrm{Biy}(X)$ y por lo que vimos α es un morfismo de grupos.

Recíprocamente, si partimos de que $\alpha : G \to \mathrm{Biy}(X)$ es un morfismo de grupos, entonces razonando a la inversa de las dos fórmulas de arriba deducimos que $G \times X \dot{\to} X$ es una acción. □

Notar que a la acción trivial le corresponde el morfismo trivial. Decimos que una acción es *fiel* si $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$, implica $g = 1$. Esto equivale a que el morfismo $G \overset{\alpha}{\to} \mathrm{Biy}(X)$ sea inyectivo, lo cual a su vez implica $G \simeq \alpha(G) < \mathrm{Biy}(X)$.

Teorema 5.4 (Cayley)**.** *Todo grupo finito de orden n es isomorfo a algún subgrupo de $\mathcal{S}_n$.*

Dem. Sea G un grupo de orden n. La acción por traslaciones a la izquierda de G en G es fiel:

$$g \cdot x = x,\ \forall x \in G \quad \Rightarrow \quad gx = x,\ \forall x \in G \quad \Rightarrow \quad g = 1.$$

Luego si $\alpha : G \to \mathrm{Biy}(G)$ es el morfismo asociado a la acción, entonces $G \simeq \alpha(G) < \mathrm{Biy}(G) \simeq \mathcal{S}_n$. □

Observación 5.5. Las siguientes son formas naturales de obtener nuevas acciones a partir de una acción $G \times X \dot{\to} X$.

1. Si $H < G$, entonces H actúa en X por restricción de $G \times X \dot{\to} X$ a $H \times X \dot{\to} X$.
2. Un subconjunto Y de X se dice *G-invariante* o *G-estable* si $g \cdot y \in Y$, para todo $g \in G$ e $y \in Y$. Si $Y \subset X$ es G-invariante, entonces G actúa en Y por restricción de $G \times X \dot{\to} X$ a $G \times Y \dot{\to} Y$.

Ejemplo 5.6. El grupo $\mathrm{Biy}(\mathbb{R}^2)$ actúa en $\mathbb{R}^2$ mediante $\varphi \cdot p = \varphi(p)$. Como el grupo de los movimientos $\mathcal{M}$ es un subgrupo de $\mathrm{Biy}(\mathbb{R}^2)$, entonces $\mathcal{M}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ con la misma acción. Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathrm{Sim}(X)$ actúa en $\mathbb{R}^2$, y como X es invariante respecto a esta acción, entonces $\mathrm{Sim}(X)$ actúa en X.

Si X es un G-conjunto, entonces definimos una relación en X mediante

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists g \in G :\ x = g \cdot y.$$

Notar que valen

$$1 \cdot x = x; \quad g \cdot x = y \ \Rightarrow\ x = g^{-1} \cdot y; \quad g \cdot x = y,\ f \cdot y = z \ \Rightarrow\ (fg) \cdot x = z.$$

Luego esta relación es de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman las *órbitas* de la acción

$$o(x) = \{g \cdot x :\ g \in G\}, \qquad \forall x \in X.$$

Al conjunto cociente[6] se lo suele escribir $X/G := \{o(x) :\ x \in X\}$.

La acción se dice que es *transitiva* si dados $x, y \in X$ arbitrarios, entonces siempre existe algún elemento $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$; esto equivale a decir que en X hay una sola órbita.

Ejemplo 5.7. La acción de G en G por traslaciones a la izquierda es transitiva, mientras que si G no es trivial, entonces la acción por conjugación no lo es, dado que $o(1) = \{1\}$.

Observación 5.8. Las órbitas de la acción de un grupo G en un conjunto X son conjuntos G-invariantes y G actúa transitivamente en cada órbita.

[6]Esta notación se vuelve ambigua si consideramos una acción de un subgrupo H en G, dado que G/H ya lo venimos usando para el conjunto de coclases izquierdas de G respecto a H, y estos cocientes solo coinciden para la acción definida por $h \cdot g = gh^{-1}$. Para evitar dudas, aclaramos que la notación G/H la usaremos solo para el conjunto de las coclases izquierdas.

Sea X un G-conjunto.

1. Un elemento $x \in X$ es un *punto fijo* si $g \cdot x = x$, para todo $g \in G$. Escribimos X^G al conjunto de los puntos fijos de X. Notar que X^G es G-invariante y G actúa trivialmente en X^G.

2. Si $x \in X$, el *estabilizador* o *grupo de isotropía* de x es $G_x := \{g \in G : \ g \cdot x = x\}$; claramente $G_x < G$.

Proposición 5.9. *Sea X un G-conjunto.*

1. *Si $x \in X$, entonces $x \in X^G$ si y solo si $o(x) = \{x\}$ si y solo si $G_x = G$.*

2. *Si $G \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Biy}(X)$ es el morfismo asociado a la acción, entonces $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \bigcap_{x \in X} G_x$.*

Probaremos solo la segunda afirmación, ya que la primera es inmediata. *Dem.*

$$g \in \mathrm{Ker}\,(\alpha) \ \Leftrightarrow \ \alpha_g = \mathrm{id} \ \Leftrightarrow \ g \cdot x = x, \ \forall x \in X \ \Leftrightarrow \ g \in G_x, \ \forall x \in X \ \Leftrightarrow \ g \in \bigcap_{x \in X} G_x. \quad \square$$

Un mapa $\varphi : X \to Y$ entre dos G-conjuntos es un *G-mapa* si $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$, para todo $g \in G$, $x \in X$. Dos G-conjuntos X e Y son *isomorfos* (como G-conjuntos) si existe una G-mapa biyectivo $\varphi : X \to Y$.

Observación 5.10. Si G es un grupo y $H < G$, entonces G actúa en G/H mediante $g \cdot (fH) = (gf)H$.

Proposición 5.11. *Sea X un G-conjunto y $x \in X$. Entonces $o(x) \simeq G/G_x$ como G-conjuntos y por lo tanto $|o(x)| = [G : G_x]$. Luego $|o(x)|$ divide a $|G|$, cuando G es finito.*

Dem. Sea $x \in X$ y consideramos su órbita $o(x) = \{g \cdot x : \ g \in G\}$. La función $\varphi : G \to o(x)$ definida por $\varphi(g) = g \cdot x$, para todo $g \in G$ es claramente sobreyectiva. Además, si $g, f \in G$, entonces

$$\varphi(g) = \varphi(f) \ \Leftrightarrow \ g \cdot x = f \cdot x \ \Leftrightarrow \ f^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \ \Leftrightarrow \ f^{-1} g \cdot x = x \ \Leftrightarrow \ f^{-1} g \in G_x \ \Leftrightarrow \ \overline{g} = \overline{f} \text{ en } G_x.$$

Luego tiene sentido definir $\hat{\varphi} : G/G_x \to o(x)$ mediante $\hat{\varphi}(\overline{g}) := \varphi(g) = g \cdot x$, para todo $g \in G$, y esta función es inyectiva. Como claramente $\hat{\varphi}$ es sobreyectiva, deducimos que es biyectiva. Ahora consideramos a G/G_x como G-conjunto según la observación anterior. Entonces

$$\hat{\varphi}\left(g \cdot \overline{f}\right) = \hat{\varphi}\left(\overline{gf}\right) = (gf) \cdot x = g \cdot (f \cdot x) = g \cdot \hat{\varphi}\left(\overline{f}\right), \quad \forall g, f \in G.$$

Luego $\hat{\varphi} : G/G_x \to o(x)$ es un G-mapa biyectivo. $\square$

Sea G un grupo y X un G-conjunto. Un *conjunto de representantes de las órbitas* es un subconjunto $X_0 \subset X$ que contiene un y solo un elemento de cada órbita. Notar $X^G \subset X_0$ y $|X_0| = |X/G|$.

Proposición 5.12. *Si un grupo G actúa no trivialmente en un conjunto finito X, entonces existen elementos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que*

$$|X| = \left|X^G\right| + \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}], \ \textit{con } [G : G_{x_i}] > 1, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dem. Sea $X_0 = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ un conjunto de representantes de las órbitas tal que $X^G = \{x_{n+1}, \ldots, x_m\}$. Luego $X = \bigsqcup_{i=1}^{m} o(x_i)$ y por lo tanto

$$|X| = \sum_{i=1}^{m} |o(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} |o(x_i)| + \sum_{i=n+1}^{m} |o(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}] + \left|X^G\right|. \quad \square$$

A continuación veremos un par de aplicaciones de la proposición anterior.

Acción por conjugación. Sea G un grupo. Recordar que si $g \in G$ y definimos $\mathrm{int}_g : G \to G$ mediante $\mathrm{int}_g(x) = gxg^{-1}$, entonces $\mathrm{int}_g \in \mathrm{Aut}(G)$, para todo $g \in G$. Esto define un mapa $\mathrm{int} : G \to \mathrm{Aut}(G) < \mathrm{Biy}(G)$. Este mapa es un morfismo de grupos; luego induce una acción de G en G mediante

$$g \cdot x = \mathrm{int}_g(x) = gxg^{-1}, \qquad \forall g, x \in G.$$

La órbita de $x \in G$ es $[x] := \left\{gxg^{-1} : \ g \in G\right\}$ y se llama la *clase de conjugación* de x. El estabilizador de x es $C_G(x) = \{g \in G : \ gx = xg\}$ y se llama el *centralizador* de x. El conjunto de los puntos fijos es el *centro* de G, definido por

$$Z(G) := \{g \in G : \ gx = xg, \ \forall x \in G\}.$$

Notar que es $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$; luego la parte 2 de la proposición 5.9 implica $Z(G) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{int})$ y por lo tanto $Z(G)$ es un subgrupo de G.

La acción por conjugación solo es interesante cuando G no es abeliano. En ese caso las proposiciones 5.11 y 5.12 implican el siguiente resultado.

Proposición 5.13. *Sea G un grupo finito no abeliano. Entonces:*

1. *Si $x \in G$, es $\#[x] = [G : C_G(x)]$. Luego $\#[x]$ divide a $|G|$.*
2. *Existen $x_1, \ldots, x_n \in G$, tales que*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : C_G(x_i)], \tag{5}$$

siendo $[G : C_G(x_i)] > 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$. La fórmula (5) se llama la ecuación de las clases. □

El siguiente resultado es un recíproco parcial del teorema de Lagrange.

Teorema 5.14 (Cauchy)**.** *Sea G un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$. Entonces G contiene algún subgrupo de orden p.*

Dem. La tesis equivale a probar que en G existe un elemento de orden p (dado que todo grupo de orden primo es cíclico). Sea $X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p : \ g_1 g_2 \cdots g_p = 1\}$. Notar

$$(g_1, \ldots, g_p) \in X \ \Leftrightarrow \ g_1 g_2 \cdots g_p = 1 \ \Leftrightarrow \ g_2 \cdots g_p = g_1^{-1} \ \Leftrightarrow \ g_2 \cdots g_p g_1 = 1 \ \Leftrightarrow \ (g_2, \ldots, g_p, g_1) \in X.$$

Luego tiene sentido definir $\sigma : X \to X$ mediante

$$\sigma(g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_2, \ldots, g_p, g_1), \quad \forall (g_1, \ldots, g_p) \in X.$$

Claramente $\sigma \in \mathrm{Biy}(X)$ y verifica $\sigma^p = \mathrm{id}$, luego la proposición 3.9 implica que podemos definir un morfismo $\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Biy}(X)$ mediante $\overline{m} \mapsto \sigma^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Este morfismo no es trivial ($\sigma \neq \mathrm{id}$) y por lo tanto induce una acción no trivial $\mathbb{Z}_p \times X \to X$. Luego la proposición 5.12 implica que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$|X| = \left|X^{\mathbb{Z}_p}\right| + \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{Z}_p : (\mathbb{Z}_p)_{x_i}], \ \text{con } [\mathbb{Z}_p : (\mathbb{Z}_p)_{x_i}] > 1, \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Notar $X^{\mathbb{Z}_p} = \{(g, \ldots, g) \in G^p : \ g^p = 1\}$; luego $(1, \ldots, 1) \in X^{\mathbb{Z}_p}$ y por lo tanto $\left|X^{\mathbb{Z}_p}\right| \geq 1$. La función $\varphi : G^{p-1} \to X$ definida por $\varphi(g_1, \ldots, g_{p-1}) = \left(g_1, \ldots, g_{p-1}, (g_1 \cdots g_{p-1})^{-1}\right)$ es biyectiva; luego $|X| = |G|^{p-1}$. Además $[\mathbb{Z}_p : (\mathbb{Z}_p)_{x_i}] = p$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces, como p divide a $|X| = |G|^{p-1}$, usando (6) deducimos $p \mid \left|X^{\mathbb{Z}_p}\right|$ y por lo tanto $\left|X^{\mathbb{Z}_p}\right| \geq p$ (recordar que es $\left|X^{\mathbb{Z}_p}\right| \geq 1$). Entonces existe $(g, \ldots, g) \in X^{\mathbb{Z}_p}$ tal que $g \neq 1$. Luego, como p es primo, de $g \neq 1$ y $g^p = 1$ deducimos $|g| = p$. □

6. Subgrupos normales

Un subgrupo N de un grupo G se dice *normal* si verifica $gNg^{-1} \subset N$, para todo $g \in G$. Escribiremos $N \lhd G$ para indicar la normalidad.

Proposición 6.1. *Sea G un grupo y N un subgrupo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *N es normal.*
2. *$gNg^{-1} = N$, para todo $g \in G$.*
3. *$gN = Ng$, para todo $g \in G$.*
4. *Las relaciones $\equiv \pmod N$ y $\equiv_d \pmod N$ coinciden.*
5. *$G/N = N\backslash G$.*

Dem. Es claro que (2) equivale con (3). Dado que es equivalente tener una relación de equivalencia en un conjunto a tener una partición del conjunto (en clases de equivalencia), se deduce que (3), (4) y (5) son equivalentes.

Es claro que (2) implica (1). Probaremos el recíproco. Sea $g \in G$. Sabemos que vale $gNg^{-1} \subset N$. Aplicando esto a g^{-1} obtenemos $g^{-1}Ng \subset N$, lo cual implica $N \subset gNg^{-1}$. Luego tenemos la doble inclusión y por lo tanto $gNg^{-1} = N$. Luego (1) y (2) son equivalentes y esto termina la prueba. □

Ejemplos 6.2.

1. El subgrupo trivial $\{1\}$ y el grupo G son subgrupos normales de G.
2. Si $K < G$ y $K \subset Z(G)$, entonces $K \lhd G$; en particular $Z(G) \lhd G$.
3. Es un ejercicio el probar que si $N < G$ y $[G : N] = 2$, entonces $N \lhd G$.
4. Sea $D_3 = \{1, b, b^2, a, ab, ab^2\}$ el grupo diedral visto en el ejemplo 4.2. Si $H = \langle a \rangle = \{1, a\}$, vimos que $bH \neq Hb$, luego H no es normal. Si $K = \langle b \rangle = \{1, b, b^2\}$, entonces $[G : K] = 2$ y por lo tanto $K \lhd D_3$.
5. Si $\varphi : G \to F$ es un morfismo de grupos, entonces $\operatorname{Ker}(\varphi) \lhd G$.
6. Si G actúa en X, entonces $\bigcap_{x \in X} G_x \lhd G$ (ver la proposición 5.9).
7. Como $\det : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$ es un morfismo, deducimos $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \lhd \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

Observaciones 6.3.

1. Si G es abeliano, entonces todo subgrupo de G es normal. El recíproco es falso: los cuaternios son un grupo no abeliano, pero todos sus subgrupos son normales (ejercicio).
2. Si $N \lhd G$ y $N < H < G$, entonces $N \lhd H$.
3. La normalidad **no es transitiva**, *i.e.* dados $N < H < G$, si $N \lhd H$ y $H \lhd G$, esto no implica $N \lhd G$.
4. Si $N_i \lhd G$, para todo $i \in I$, entonces $\bigcap_{i \in I} N_i \lhd G$.

Recordar que si G es un grupo y H y K son dos subgrupos, entonces $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$ es el menor subgrupo que los contiene. El problema es obtener una buena descripción de $H \vee K$.
Notar que en general $HK := \{hk : \ h \in H, \ k \in K\}$ es solo un subconjunto de G. Es un ejercicio el probar que si H y K son finitos, entonces $|HK| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}$.

Proposición 6.4. *Sean G un grupo y K, H subgrupos de G.*

1. *Si $K \cap H = \{1\}$, entonces todo elemento de HK se escribe de fórma única como hk, con $h \in H$ y $k \in K$. Lo mismo sucede con KH.*

2. *Si $K \lhd G$ o $H \lhd G$, entonces $KH < G$. Luego $K \vee H = KH = HK$.*

3. *Si $K \lhd G$ y $H \lhd G$, entonces $KH \lhd G$.*

4. *Si $K \lhd G$, $H \lhd G$ y $K \cap H = \{1\}$, entonces $kh = hk$, para todo $k \in K$, $h \in H$.*

Dem. (1). Sean $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$ tales que $h_1 k_1 = h_2 k_2$. Entonces $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} \in K \cap H = \{1\}$, luego $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} = 1$, lo cual implica $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$.

(2). Supongamos $K \lhd G$ y $H < G$. Si $k \in K$ y $h \in H$, entonces escribiendo $kh = h(h^{-1}kh)$ deducimos $KH \subset HK$. Esto implica $KH = HK$ lo cual a su vez implica $KH < G$ (ejercicio). Lo mismo se obtiene si es $K < G$ y $H \lhd G$.

(3). Sean $k \in K$, $h \in H$ y $g \in G$, entonces $g(kh)g^{-1} = \left(gkg^{-1}\right)\left(ghg^{-1}\right) \in KH$. Luego $KH \lhd G$.

(4). Si dados $k \in K$ y $h \in H$, consideramos su *conmutador* $[k, h] := khk^{-1}h^{-1}$, entonces $K \lhd G$ y $H \lhd G$ implican $[k, h] \in K \cap H = \{1\}$; luego $[k, h] = 1$, lo cual equivale a $kh = hk$. □

Observación 6.5. Si G es un grupo y H, K son subgrupos tales que $G = KH$ y $kh = hk$, para todo $k \in K$, $h \in H$, entonces es fácil de probar que K y H son subgrupos normales de G. Luego si $G = KH$, entonces vale un recíproco parcial de la parte (4) de la proposición anterior.

Proposición 6.6.

1. *Sean G_1 y G_2 grupos, y $G = G_1 \times G_2$ su producto directo. Consideremos los subgrupos $\tilde{G}_1 = G_1 \times \{1\}$ y $\tilde{G}_2 = \{1\} \times G_2$. Entonces $\tilde{G}_1$ y $\tilde{G}_2$ son normales en G, y verifican $G = \tilde{G}_1 \tilde{G}_2$ y $\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 = \{(1, 1)\}$.*

2. *Recíprocamente, si un grupo G contiene dos subgrupos normales H y K tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{1\}$, entonces $G \simeq H \times K$.*

Dem. La primera afirmación es fácil de probar. Mostraremos solo la normalidad de $\tilde{G}_1$, dejando el resto como ejercicio. Sean $(g_1, g_2) \in G$ y $(f, 1) \in \tilde{G}_1$, entonces

$$(g_1, g_2) \cdot (f, 1) \cdot (g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2) \cdot (f, 1) \cdot \left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = \left(g_1 f g_1^{-1}, g_2 1 g_2^{-1}\right) = \left(g_1 f g_1^{-1}, 1\right) \in \tilde{G}_1.$$

Consideremos ahora la segunda afirmación. Aplicando la proposición 6.4 sabemos que los elementos de H conmutan con los de K y que todo elemento de G se escribe en forma única como hk, con $h \in H$ y $k \in K$. Esto último implica que la función $\varphi : H \times K \to G$ definida por $\varphi(h, k) = hk$ es biyectiva. Veremos que φ es un morfismo.

$$\varphi\big((h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)\big) = \varphi(h_1 h_2, k_1 k_2) = h_1 h_2 k_1 k_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = \varphi(h_1, k_1)\, \varphi(h_2, k_2).$$

Luego $\varphi : H \times K \to G$ es un isomorfismo. □

Grupo cociente.

Proposición 6.7. *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal, entonces G/N admite una estructura de grupo de forma tal que la proyección canónica $\pi : G \to G/N$ es un morfismo.*

Dem. Sean $g_1, g_2, f_1, f_2 \in G$. Si $f_1 \equiv g_1 (\text{mód } N)$ y $f_2 \equiv g_2 (\text{mód } N)$, entonces existen $n_1, n_2 \in N$ tales que $f_1 = g_1 n_1$ y $f_2 = g_2 n_2$. Luego

$$f_1 f_2 = g_1 n_1 g_2 n_2 = g_1 g_2 \left(g_2^{-1} n_1 g_2\right) n_2, \quad \text{con } \left(g_2^{-1} n_1 g_2\right) n_2 \in N \quad \Rightarrow \quad f_1 f_2 \equiv g_1 g_2 (\text{mód } N).$$

Luego tiene sentido definir un producto en G/N mediante $\overline{f}\,\overline{g} = \overline{fg}$, para todo $f, g \in G$. El resto es directo. □

Observación 6.8. Si $N \lhd G$ y $\pi : G \to G/N$ es la proyección canónica, entonces $\text{Ker}\,(\pi) = N$. Luego los subgrupos normales de G son los subgrupos obtenidos como núcleos de morfismos que salen de G.

Observación 6.9. Si en un diagrama de grupos y morfismos del tipo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & \nearrow_{\psi} & \\ H & & \end{array}$$

pensamos las flechas (morfismos) como caminos, entonces tenemos dos formas de ir de G a F, mediante φ o mediante $\psi \circ \mu$ (primero vamos por μ y luego por ψ). Si se everifica que $\psi \circ \mu = \varphi$, entonces decimos que el diagrama *conmuta*. Esto quiere decir que da lo mismo ir por uno u otro camino. Esto se generaliza a cualquier diagrama de ese tipo. Por ejemplo la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ H & \xrightarrow[\psi]{} & K \end{array}$$

significa que vale $\psi \circ \alpha = \beta \circ \varphi$.

Teorema 6.10 (Propiedad universal del cociente)**.** *Sea $\varphi : G \to F$ un morfismo. Si $N \lhd G$ y $N \subset \text{Ker}\,(\varphi)$, entonces existe un único morfismo $\hat{\varphi} : G/N \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\hat{\varphi}} & \\ G/N & & \end{array} \tag{7}$$

Además $\text{Im}(\hat{\varphi}) = \text{Im}(\varphi)$ *y* $\text{Ker}\,(\hat{\varphi}) = \text{Ker}\,(\varphi)/N$.

Notar que la conmutatividad de (7) equivale a que se verifique $\hat{\varphi}\,(\overline{g}) = \varphi(g)$, para todo $g \in G$.

Dem. Si $g, f \in G$ y $n \in N$ son tales que $g = fn$, entonces $\varphi(g) = \varphi(fn) = \varphi(f)\varphi(n) = \varphi(f)1 = \varphi(f)$. Luego probamos

$$\overline{g} = \overline{f} \in G/N \quad \Rightarrow \quad \varphi(g) = \varphi(f).$$

Esta fórmula implica que tiene sentido definir una función $\hat{\varphi} : G/N \to F$ mediante $\hat{\varphi}(\overline{g}) = \varphi(g)$, para todo $g \in G$. Es fácil de probar que $\hat{\varphi}$ es un morfismo:

$$\hat{\varphi}\left(\overline{g}\,\overline{f}\right) = \hat{\varphi}\left(\overline{gf}\right) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \hat{\varphi}(\overline{g})\,\hat{\varphi}\left(\overline{f}\right).$$

Es claro que vale $\mathrm{Im}(\hat{\varphi}) = \mathrm{Im}(\varphi)$. La igualdad $\mathrm{Ker}\,(\hat{\varphi}) = \mathrm{Ker}\,(\varphi)/N$ se deduce de lo siguiente

$$\overline{g} \in \mathrm{Ker}\,(\hat{\varphi}) \;\Leftrightarrow\; \hat{\varphi}(\overline{g}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(g) = 1 \;\Leftrightarrow\; g \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \overline{g} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)/N. \quad \square$$

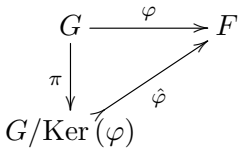
Observación 6.11. Sea $\varphi : G \to F$ un morfismo y $N \lhd G$. Si existe un morfismo $\hat{\varphi} : G/N \to F$ tal que (7) conmuta, entonces necesariamente es $N \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Esto se debe a lo siguiente

$$n \in N \;\Rightarrow\; \overline{n} = \overline{1} \in G/N \;\Rightarrow\; \varphi(n) = \hat{\varphi}(\overline{n}) = \hat{\varphi}\left(\overline{1}\right) = 1 \;\Rightarrow\; n \in \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

Luego la condición $N \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ es necesaria para la validez del teorema anterior.

Los siguientes resultados se deducen de la propiedad universal del cociente.

Teorema 6.12 (Primer teorema de isomorfismo)**.**
Si $\varphi : G \to F$ es un morfismo, entonces existe un monomorfismo $\hat{\varphi} : G/\mathrm{Ker}\,(\varphi) \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta

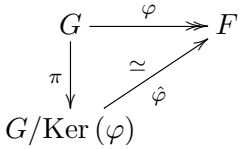


Luego $\mathrm{Im}(\varphi) \simeq G/\mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

Dem. La existencia de $\hat{\varphi}$ se deduce de la propiedad universal del cociente aplicada a $N = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Notar que vale $\mathrm{Ker}\,(\hat{\varphi}) = \mathrm{Ker}\,(\varphi)/\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \left\{\overline{1}\right\}$, luego $\hat{\varphi}$ es inyectivo y por lo tanto $G/\mathrm{Ker}\,(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\hat{\varphi}) = \mathrm{Im}(\varphi)$. $\square$

Un enunciado equivalente al anterior es el siguiente.

Teorema 6.13. *Si $\varphi : G \to F$ es un epimorfismo, entonces existe un isomorfismo $\hat{\varphi} : G/\mathrm{Ker}\,(\varphi) \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta*



Luego $F \simeq G/\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. $\square$

Teorema 6.14 (Segundo teorema de isomorfismo)**.**
Sea G un grupo, $K < G$ y $N \lhd G$. Entonces $N \lhd NK$, $N \cap K \lhd K$ y

$$\frac{NK}{N} \simeq \frac{K}{N \cap K}.$$

Dem. Empezamos observando que $K < G$ y $N \lhd G$ implican $NK < G$, y como $N \subset NK$, entonces $N \lhd NK$. Consideremos la composición $K \hookrightarrow NK \twoheadrightarrow NK/N$, es decir el morfismo $\varphi : K \to NK/N$ definido por $\varphi(k) = \overline{k}$, para todo $k \in K$. Si $n \in N$ y $k \in K$, entonces en NK/N vale $\overline{nk} = \overline{n}\,\overline{k} = \overline{1}\,\overline{k} = \overline{k} = \varphi(k)$, luego φ es sobreyectiva. Además, si $k \in K$, entonces

$$k \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(k) = \overline{1} \in NK/N \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{k} = \overline{1} \in NK/N \qquad \Leftrightarrow \qquad k \in N$$

Luego $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = N \cap K$. Esto implica $N \cap K \lhd K$. Finalmente el primer teorema de isomorfismo aplicado a φ implica $\frac{NK}{N} \simeq \frac{K}{N \cap K}$. $\square$

La siguiente proposición sirve para construir morfismos entre cocientes.

Proposición 6.15. *Sean G, F grupos, $N \lhd G$ y $K \lhd F$. Si $\varphi : G \to F$ es un morfismo tal que $\varphi(N) \subset K$, entonces existe un único morfismo $\hat{\varphi} : G/N \to F/K$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G/N & \xrightarrow[\hat{\varphi}]{} & F/K \end{array}$$

Además.

1. $\mathrm{Ker}\ (\hat{\varphi}) = \varphi^{-1}(K)/N$. *Luego $\hat{\varphi}$ es inyectivo si y solo si $\varphi^{-1}(K) = N$.*
2. *El morfismo $\hat{\varphi}$ es sobreyectivo si y solo si $F = \mathrm{Im}(\varphi)K$.*

Notar que la conmutatividad del diagrama equivale a que se verifique $\hat{\varphi}\,(\overline{g}) = \overline{\varphi(g)}$, para todo $g \in G$.

Dem. El morfismo $\hat{\varphi}$ se obtiene aplicando la propiedad universal a $\pi \circ \varphi : G \to F/K$, dado que $\varphi(N) \subset K$ implica $N \subset \mathrm{Ker}\,(\pi \circ \varphi)$. Notar

$$g \in \mathrm{Ker}\,(\pi \circ \varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\varphi(g)} = \overline{1} \in F/K \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(g) \in K \qquad \Leftrightarrow \qquad g \in \varphi^{-1}(K).$$

Luego $\mathrm{Ker}\ (\hat{\varphi}) = \mathrm{Ker}\,(\pi \circ \varphi)/N = \varphi^{-1}(K)/N$; esto prueba la primer afirmación. Para la segunda, observar

$$\mathrm{Im}(\hat{\varphi}) = F/K \ \Leftrightarrow\ \forall f \in F,\ \exists g \in G :\ \overline{f} = \overline{\varphi(g)} \in F/K \ \Leftrightarrow\ \forall f \in F,\ \exists g \in G,\ k \in K :\ f = \varphi(g)k. \quad \square$$

Observación 6.16. En forma análoga a como vimos en la observación 6.11, se prueba que la condición $\varphi(N) \subset K$ es necesaria para que valga el teorema anterior.

Teorema 6.17 (Tercer teorema de isomorfismo)**.**
Sea G un grupo y $N < H < G$ tales que $N \lhd G$ y $H \lhd G$. Entonces $H/N \lhd G/N$ y

$$\frac{G/N}{H/N} \simeq \frac{G}{H}.$$

Dem. Como es $N \subset H$, entonces el automorfismo identidad de G induce un morfismo $\varphi : G/N \to G/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G/N & \xrightarrow[\varphi]{} & G/H \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi\,(gN) = gH,\ \forall g \in G.$$

Notar que φ es sobreyectivo y su núcleo es H/N, luego $H/N \lhd G/N$. El resto de la tesis se obtiene aplicando a φ el primer teorema de isomorfismo. $\square$

Proposición 6.18. *Si $\varphi : G \to F$ es un morfismo, entonces vale lo siguiente.*

1. *Si $H \lhd G$, entonces $\varphi(H) \lhd \mathrm{Im}(\varphi)$.*
2. *Si $K \lhd F$, entonces $\varphi^{-1}(K) \lhd G$.* $\square$

Recordar que en la familia de subgrupos de un grupo tenemos el orden dado por la inclusión. Además, si $\varphi : G \to F$ es un morfismo, $H < G$ y $K < F$, entonces $\varphi(H) < F$ y $\mathrm{Ker}\,(\varphi) < \varphi^{-1}(K) < G$.

Proposición 6.19. *Sean G un grupo, N un subgrupo normal y $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica. Consideramos $\mathcal{S} = \{H : \ N < H < G\}$ y $\hat{\mathcal{S}} = \{K : \ K < G/N\}$. Entonces las correspondencias*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \hat{\mathcal{S}} \\ H & \mapsto & \pi(H) = H/N \end{array} \text{ ,} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{S}} & \to & \mathcal{S} \\ K & \mapsto & \pi^{-1}(K) \end{array}$$

son monótonas crecientes estrictas, preservan la normalidad y son inversas una de la otra.

Dem. Es claro que esas correspondencias son monótonas crecientes. Como $\pi : G \to G/N$ es sobreyectiva, entonces aplicando la observación anterior deducimos que también preservan la normalidad. Veremos ahora que son inversas una de la otra. Sea $K < G/N$, es claro que vale $\pi\big(\pi^{-1}(K)\big) \subset K$, y como $\pi : G \to G/N$ es sobreyectiva, entonces es fácil de probar que vale también la inclusión contraria; luego $\pi\big(\pi^{-1}(K)\big) = K$. Sea ahora $N < H < G$. En este caso es claro que vale $H \subset \pi^{-1}\big(\pi(H)\big)$; veremos ahora la inclusión contraria. Sea $g \in \pi^{-1}\big(\pi(H)\big)$, entonces

$$\exists h \in H \text{ tal que } \pi(g) = \pi(h) \quad \Rightarrow \quad \overline{g} = \overline{h} \in G/N \quad \Rightarrow \quad \exists n \in N \text{ tal que } g = hn \quad \overset{N \subset H}{\Rightarrow} \quad g \in H.$$

Luego $\pi^{-1}\big(\pi(H)\big) \subset H$ y por lo tanto $\pi^{-1}\big(\pi(H)\big) = H$. Luego probamos que las correspondencias son inversas una de la otra, y como son monótonas, deducimos que son monótonas estrictas. □

Observación 6.20. En la correspondencia anterior, si tenemos $N < H < G$ y $H \lhd G$, entonces el tercer teorema de isomorfismo implica $H/N \lhd G/N$ y $G/H \simeq (G/N)/(H/N)$.

Aplicando el primer teorema de isomorfismo se deduce el siguiente.

Corolario 6.21. *Sea $\varphi : G \to F$ un epimorfismo. Consideramos $\mathcal{S} = \{H : \ \mathrm{Ker}\,(\varphi) < H < G\}$ y $\hat{\mathcal{S}} = \{K : \ K < F\}$. Entonces las correspondencias*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \hat{\mathcal{S}} \\ H & \mapsto & \varphi(H) \end{array} \text{ ,} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{S}} & \to & \mathcal{S} \\ K & \mapsto & \varphi^{-1}(K) \end{array}$$

son monótonas crecientes estrictas, preservan la normalidad y son inversas una de la otra. □

Sea G un grupo y H un subgrupo. Para fijar ideas supondremos que H no es normal, pero eso no es necesario. En lo que sigue responderemos las dos preguntas siguientes. ¿Cuál es el menor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal? y ¿cuál es el mayor subgrupo normal de G contenido en H?

Dos subgrupos H y K de G son *conjugados* si existe $g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$, *i.e.* si $H = \mathrm{int}_g(K)$. Claramente los subgrupos conjugados son isomorfos como grupos. El *normalizador* de un subgrupo H de G es $N_G(H) := \{g \in G : \ gHg^{-1} = H\}$. Notar $H \subset N_G(H)$, y $H \lhd G$ si y solo si $N_G(H) = G$.

Proposición 6.22. *Si $H < G$, entonces $N_G(H)$ es el mayor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal. Además*

$$\#\{K < G : \ K \text{ es conjugado de } H\} = [G : N_G(H)]. \tag{8}$$

Dem. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los subgrupos de G. Si consideramos G actuando en $\mathcal{S}$ por conjugación, entonces la órbita de H es $\{K < G : \ K \text{ es conjugado de } H\}$ y el estabilizador de H es $N_G(H)$. Luego $N_G(H)$ es un subgrupo de G. Además es claro que es $H \lhd N_G(H)$ y que si K es un subgrupo de G tal que $H \subset K$ y $H \lhd K$, entonces $K \subset N_G(H)$. Finalmente la fórmula (8) se obtiene aplicando la proposición 5.11. □

Lo que sigue es una aplicación del normalizador.

Proposición 6.23. *Si G es un grupo y H, K son subgrupos tales que $H \subset N_G(K)$, entonces HK es un subgrupo.*

Dem. Por hipótesis es $H < N_G(K)$ y sabemos $K \lhd N_G(K)$. Luego $HK < N_G(K)$ y por lo tanto $HK < G$. □

Lo anterior responde la primera pregunta, lo que sigue responde la segunda.

Proposición 6.24. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Consideremos $K = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$. Entonces*

1. *K es el mayor subgrupo normal de G contenido en H.*
2. *Existe un morfismo inyectivo $G/K \rightarrowtail \mathrm{Biy}(G/H)$.*

Dem. Consideremos la acción de G en G/H dada por $g \cdot \overline{f} = \overline{gf}$. Sea $\alpha : G \to \mathrm{Biy}(G/H)$ el morfismo asociado a esta acción. La parte 2 de la proposición 5.9 implica $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \bigcap_{\overline{g}\in G/H} G_{\overline{g}} = \bigcap_{g\in G} G_{\overline{g}}$. Además

$$f \in G_{\overline{g}} \;\Leftrightarrow\; f \cdot \overline{g} = \overline{g} \;\Leftrightarrow\; \overline{fg} = \overline{g} \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H :\; fg = gh \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H :\; f = ghg^{-1} \;\Leftrightarrow\; f \in gHg^{-1}.$$

Luego $G_{\overline{g}} = gHg^{-1}$, para todo $g \in G$ y por lo tanto

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = K.$$

Como K es un núcleo, entonces K es normal en G. Tomando $g = 1$ en $K = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ deducimos $K \subset H$. Además, si $N \lhd G$ y $N \subset H$, entonces

$$N = gNg^{-1} \subset gHg^{-1}, \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad N \subset \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = K.$$

Esto termina la prueba de la primera afirmación. La segunda se deduce del primer teorema de isomorfismo aplicado a α. □

Corolario 6.25. *Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G.*

1. *Si $|G|$ no divide a $[G : H]!$, entonces existe $K \lhd G$ tal que $\{1\} \neq K \subset H$.*
2. *Si $[G : H] = p$, siendo p el menor número primo que divide a $|G|$, entonces $H \lhd G$.*

Dem. La proposición 6.24 nos dice que existe $K \lhd G$, $K \subset H$ y un morfismo inyectivo $G/K \rightarrowtail \mathrm{Biy}(G/H)$. Entonces G/K es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Biy}(G/H)$ y aplicando el teorema de Lagrange obtenemos

$$[G : K] \mid [G : H]!. \tag{9}$$

Si fuese $K = \{1\}$, entonces (9) implicaría que $|G|$ divide a $[G : H]!$, lo cual no se cumple. Luego $K \neq \{1\}$.

En el segundo caso, de (9) obtenemos $[G : K] \mid p!$. Escribiendo $[G : K] = [G : H][H : K] = p[H : K]$, deducimos $[H : K] \mid (p-1)!$ y al ser $[H : K]$ un divisor de $|G|$, deducimos $[H : K] = 1$. Luego $H = K$. □

Observación 6.26. La parte 2 de la proposición anterior es válida aun si p es el único primo que divide a $|G|$. Es decir, si $|G| = p^n$ y existe $H < G$ tal que $|H| = p^{n-1}$, entonces H es normal en G.

Ejemplo 6.27. Sea G un grupo de orden 15. Por el teorema de Cauchy sabemos que existen subgrupos H y K de G tales que $|H| = 3$ y $|K| = 5$. Luego el corolario 6.25 implica $K \lhd G$.

Ejemplo 6.28. Sea G un grupo de orden 99. Al ser $99 = 3^2 \times 11$, sabemos que G contiene un subgrupo H de orden 3 y un subgrupo K de orden 11. Notar que $[G : K] = 9$, luego $|G|$ no divide a $[G : K]!$ y por lo tanto existe $\{1\} \neq N \lhd G$ tal que $N < K$; al ser $|K|$ primo deducimos $K = N$, luego $K \lhd G$. Claramente $H \cap K = \{1\}$, luego $HK < G$ y $|HK| = 33$. Al ser $[G : HK] = 3$, el corolario 6.25 implica $HK \lhd G$.

A continuación veremos la clasificación de los grupos de orden $2p$.

Proposición 6.29. *Si G es un grupo de orden $2p$, con p primo impar, entonces G es cíclico o es un grupo diedral.*

Dem. Aplicando el teorema de Cauchy sabemos que existen $a, b \in G$ tales que $|a| = p$ y $|b| = 2$. Luego $K = \langle a \rangle$ es un subgrupo de orden p y $N = \langle b \rangle$ es un subgrupo de orden 2. Al ser 2 y p primos distintos deducimos $|N \cap K| = 1$, luego $|NK| = 2p = |G|$ y por lo tanto $G = NK$. Luego G está generado por a y b.

Como es $[G : K] = 2$, entonces $K = \langle a \rangle$ es normal. Luego existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $bab^{-1} = a^r$. Esto equivale a $\mathrm{int}_b(a) = a^r$, siendo $\mathrm{int}_b : G \to G$ el automorfismo interno correspondiente a b. Operando obtenemos

$$\mathrm{int}_{b^2}(a) = (\mathrm{int}_b \circ \mathrm{int}_b)(a) = \mathrm{int}_b\left(\mathrm{int}_b(a)\right) = \mathrm{int}_b\left(a^r\right) = \mathrm{int}_b\left(a\right)^r = (a^r)^r = a^{r^2}.$$

Pero es $b^2 = 1$, luego $\mathrm{int}_{b^2}(a) = a$ y por lo tanto $a = a^{r^2}$. Como el orden de a es p, esto último ocurre si y solo si $r^2 \equiv 1 (\mathrm{mód}\ p)$. Pasando al cociente obtenemos

$$r^2 \equiv 1 (\mathrm{mód}\ p) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{r}^2 = \overline{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{r}^2 - \overline{1} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overline{r} - \overline{1}\right)\left(\overline{r} + \overline{1}\right) = \overline{0}.$$

Como $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo, esta última igualdad implica $\overline{r} = \overline{1}$ o $\overline{r} = -\overline{1}$. Luego es $r \equiv 1 (\mathrm{mód}\ p)$ o $r \equiv -1 (\mathrm{mód}\ p)$.

En el primer caso obtenemos $bab^{-1} = a$, luego $ab = ba$. Como $|a| = p$, $|b| = 2$ y $ab = ba$, entonces $|ab| = 2p = |G|$. Luego $G = \langle ab \rangle$ es un grupo cíclico.

En el segundo caso es $bab^{-1} = a^{-1} = a^{p-1}$. Luego $ba = a^{p-1}b$, lo cual equivale a $ab = ba^{p-1}$ (usando $|b| = 2$). Entonces G está generado por dos elementos a y b que verifican $|a| = p$, $|b| = 2$ y $ab = ba^{p-1}$, y estas son las relaciones que caracterizan al grupo diedral D_p. □

Corolario 6.30. *Si G es un grupo de orden 6, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ o D_3. En particular $\mathcal{S}_3 \simeq D_3$.* □

7. El grupo simétrico

Sea $I_n = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$. Recordar que el *grupo simétrico* es $\mathcal{S}_n = \mathrm{Biy}(I_n)$, en el cual el producto es la composición de funciones. El orden de $\mathcal{S}_n$ es $n!$. A los elementos de $\mathcal{S}_n$ se les llama *permutaciones*. Para las permutaciones usaremos la notación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ que verifica que existen $i_1, i_2, \ldots, i_r \in I_n$ $(2 \leq r \leq n)$ tales que

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3,\ \ldots,\ \sigma(i_{r-1}) = i_r,\ \sigma(i_r) = i_1 \quad \text{y} \quad \sigma(x) = x,\ \forall x \in I_n \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}.$$

se dice que es un *r-ciclo* o *ciclo de longitud r* y se escribe $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$. Los 2-ciclos se llaman *trasposiciones*.

Observación 7.1.

1. Si $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$, entonces $|\sigma| = r$ y $\sigma^{-1} = (i_r i_{r-1} \cdots i_1)$.
2. Vale $(i_1 i_2 \cdots i_r) = (i_2 i_3 \cdots i_r i_1) = (i_3 \cdots i_r i_1 i_2) = \cdots = (i_r i_1 i_2 \cdots i_{r-1})$.

3. Si σ es un r-ciclo, $x \in I_n$ y $\sigma(x) \neq x$, entonces $\sigma = \big(x\,\sigma(x)\,\sigma^2(x)\,\cdots\,\sigma^{r-1}(x)\big)$. Esto se debe a que si $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$ y $\sigma(x) \neq x$, entonces existe un k tal que $x = i_k$, luego $\sigma(x) = i_{k+1}$, $\sigma^2(x) = i_{k+2}$, etc.

Dos ciclos $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ y $(j_1 j_2 \cdots j_s)$ se dicen *disjuntos* si los conjuntos $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ y $\{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ son disjuntos.

Proposición 7.2. *Si dos ciclos son disjuntos, entonces conmutan.*

Dem. Sean $\sigma_1 = (i_1 i_2 \cdots i_r)$ y $\sigma_2 = (j_1 j_2 \cdots j_s)$ dos ciclos disjuntos. Si $x \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s\}$, entonces $(\sigma_1\sigma_2)(x) = (\sigma_2\sigma_1)(x) = x$. Si $x = i_k$, es

$$(\sigma_1\sigma_2)(i_k) = \sigma_1(i_k) = i_{k+1}, \quad (\sigma_2\sigma_1)(i_k) = \sigma_2(i_{k+1}) = i_{k+1} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1\sigma_2)(i_k) = (\sigma_2\sigma_1)(i_k).$$

Para $x = j_k$ es análogo. □

El siguiente resultado muestra que los ciclos generan a $\mathcal{S}_n$.

Teorema 7.3. *Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es una permutación distinta de la identidad, entonces σ se escribe en forma única (a menos del orden) como producto de ciclos disjuntos.*

La prueba está en el apéndice B, pero la idea de la misma es simple. La mostramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7.4. Consideremos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5$. Si nos fijamos en cómo opera σ en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ obtenemos

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 1 \text{ (acá se cierra un ciclo)}; \qquad 2 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2 \text{ (acá se cierra otro ciclo)}.$$

Luego σ actúa en el conjunto $\{1, 3\}$ como lo hace el 2-ciclo (13) y en el $\{2, 4, 5\}$ como lo hace el 3-ciclo (245). Entonces es claro que vale $\sigma = (13)(245)$. Esta es la descomposición de σ en ciclos disjuntos.

Ejemplo 7.5. Consideremos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Razonando como en el ejemplo anterior obtenemos

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 1; \quad 2 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2; \quad 4 \xrightarrow{\sigma} 4.$$

Luego $\sigma = (13)(25)$. Notar que 4 queda fijo por σ, por lo cual no aparece en la descomposición en ciclos.

Recordemos que dos elementos $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ son conjugados si existe $\alpha \in \mathcal{S}_n$ tal que $\sigma_1 = \alpha\sigma_2\alpha^{-1}$.

Proposición 7.6. *Sea $(i_1 \cdots i_r)$ un r-ciclo, $r \geq 2$ y $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Entonces*

$$\sigma(i_1 \cdots i_r)\sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)\big).$$

Dem. Se prueba fácilmente que vale $\sigma(i_1 \cdots i_r) = \big(\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)\big)\sigma$, como funciones de I_n en I_n. □

Corolario 7.7. *Para cada $r = 2, \ldots, n$ se cumple que todos los r-ciclos en $\mathcal{S}_n$ son conjugados entre sí.*

Dem. Dados $(i_1 \cdots i_r)$ y $(j_1 \cdots j_r)$, definimos $\sigma : I_n \to I_n$ por $\sigma(i_k) = j_k$, para todo $k = 1, \ldots, r$, y como una biyección cualquiera entre sus complementos. Luego $\sigma(i_1 \cdots i_r)\sigma^{-1} = (j_1 \cdots j_r)$. □

En lo que sigue veremos algunas propiedades de las trasposiciones.

Proposición 7.8. *Toda permutación se escribe como producto de trasposiciones.*

Dem. Por el teorema 7.3, alcanza con probarlo para la identidad y los r-ciclos. Eso es fácil

$$\mathrm{id} = (ij)(ij), \qquad (i_1 i_2 \cdots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \cdots (i_1 i_3)(i_1 i_2),\ \forall r = 2, \ldots, n. \quad \square$$

Observación 7.9. Notar que vale $(xa)(ab)(xa) = (xb)$, lo qual equivale a $(xa)(ab) = (xb)(xa)$. Esto muestra que no hay unicidad en la descomposición de una permutación en producto de trasposiciones, tanto en la cantidad de factores como en los factores que aparecen. Además, si $\tau_1, \ldots, \tau_r$ son trasposiciones disjuntas, entonces el orden del producto $\tau_1 \cdots \tau_r$ es 2, luego si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y $|\sigma| \geq 3$, entonces σ no se puede escribir como producto de trasposiciones disjuntas. Luego en la descomposición dada por la proposición 7.8, en general las trasposiciones no son disjuntas y no hay unicidad en los factores ni en la cantidad de factores.

En lo que sigue veremos que en las distintas formas de escribir una permutación como producto de trasposiciones, lo que se preserva es la paridad de la cantidad de factores.

Proposición 7.10. *La función* $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \xrightarrow{\bullet} \mathbb{R}^n$ *definida por*

$$(x_1, \ldots, x_n) \bullet \sigma = \left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

es una acción a la derecha de $\mathcal{S}_n$ *en* $\mathbb{R}^n$*.*

Dem. Es claro que vale $v \bullet \mathrm{id} = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Para la otra condición, sean $\sigma, \eta \in \mathcal{S}_n$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \bullet \sigma$. Luego $y_i = x_{\sigma(i)}$, para todo i y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left((x_1, \ldots, x_n) \bullet \sigma\right) \bullet \eta = (y_1, \ldots, y_n) \bullet \eta = \left(y_{\eta(1)}, \ldots, y_{\eta(n)}\right) = \left(x_{\sigma(\eta(1))}, \ldots, x_{\sigma(\eta(n))}\right) \\ = \left(x_{\sigma\eta(1)}, \ldots, x_{\sigma\eta(n)}\right) = (x_1, \ldots, x_n) \bullet \sigma\eta. \quad \square\end{aligned}$$

Esta acción a la derecha induce una acción a la izquierda $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}^n$, definida por

$$\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_n) \bullet \sigma^{-1} = \left(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}\right), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 7.11. *Si* $\sigma \in \mathcal{S}_n$*,* $a \in \mathbb{R}$ *y* $u, v \in \mathbb{R}^n$*, entonces*

$$\sigma \cdot (av) = a(\sigma \cdot v); \quad \sigma \cdot (u + v) = \sigma \cdot u + \sigma \cdot v.$$

Dem. Veremos solo la primera igualdad, la prueba de la otra es análoga. Sean $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $av = (y_1, \ldots . y_n)$. Luego $y_i = ax_i$, para todo i. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (av) = \sigma \cdot (y_1, \ldots, y_n) = \left(y_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, y_{\sigma^{-1}(n)}\right) = \left(ax_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, ax_{\sigma^{-1}(n)}\right) = a\left(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}\right) \\ = a(\sigma \cdot v). \quad \square\end{aligned}$$

La proposición anterior muestra que la imagen del morfismo $\mathcal{S} \to \mathrm{Biy}(\mathbb{R}^n)$ asociado a esta acción está contenida en $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Identificando en la forma usual $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (las matrices invertibles) obtenemos un morfismo de grupos $P : \mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$, definido por

$$\sigma \cdot v = P_\sigma v, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 7.12. Es fácil de probar que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, entonces $P_\sigma = \sum_{i=1}^n E_{\sigma(i),i}$, siendo $\{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ la base canónica del espacio de matrices $M_n(\mathbb{R})$. Esto implica que las P_σ son las matrices que en cada fila y columna tienen exactamente un 1, y tienen 0 en los lugares restantes.

Componiendo el morfismo $P : \mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ con el determinante $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ obtenemos un morfismo $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^\times$ definido por

$$\varepsilon(\sigma) = \det(P_\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

Proposición 7.13. *Vale $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$.*

Dem. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Como $\mathcal{S}_n$ es finito, entonces σ tiene orden finito, luego existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\sigma^k = \mathrm{id}$. Entonces

$$1 = \varepsilon(\mathrm{id}) = \varepsilon(\sigma^k) = \varepsilon(\sigma)^k \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\sigma) = \pm 1. \quad \square$$

Luego tenemos definido un morfismo de grupos $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$ (considerando a $\{\pm 1\}$ como grupo con la multiplicación). Para cada $\sigma \in \mathcal{S}_n$, el *signo* de σ es $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$.

Proposición 7.14. *Si $\tau \in \mathcal{S}_n$ es una trasposición, entonces $\varepsilon(\tau) = -1$.*

Dem. Sea $\tau = (ij)$. Entonces τ actuando en $(x_1, \ldots, x_n)$ intercambia las coordenadas x_i y x_j. Esto implica que P_τ es la matriz elemental obtenida intercambiando en la matriz identidad la fila i con la fila j. Luego $\varepsilon(\tau) = \det(P_\tau) = -\det(\mathrm{Id}) = -1$. $\square$

Corolario 7.15. *Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y sean $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k = \tau'_1 \cdots \tau'_h$ dos descomposiciones de σ en producto de trasposiciones. Entonces $k \equiv h (\mathrm{mód}\ 2)$.*

Dem. Como ε es un morfismo y $\varepsilon(\tau) = -1$, para toda trasposición τ, entonces la hipótesis implica $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k = (-1)^h$. Esta última igualdad equivale a $k \equiv h (\mathrm{mód}\ 2)$. $\square$

Observación 7.16. La proposición anterior implica que, en las distintas formas de descomponer una permutación como producto de trasposiciones, lo que se preserva es la paridad de la cantidad de factores. Luego decimos que una permutación σ es *par* si se escribe como producto de un número par de trasposiciones (lo cual equivale a $\varepsilon(\sigma) = 1$) y que es *impar* en caso contrario.

Observación 7.17. La fórmula $(i_1 i_2 \cdots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \cdots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$, implica que todo r-ciclo se escribe como producto de $(r-1)$-trasposiciones. Luego un r-ciclo es par si y solo si r es impar.

El *grupo alternado* A_n es el conjunto formado por las permutaciones pares de $\mathcal{S}_n$. Notar que A_n es el núcleo de $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$, luego A_n es un subgrupo normal de $\mathcal{S}_n$. Aplicando a ε el primer teorema de isomorfismo deducimos $[\mathcal{S}_n : A_n] = 2$; luego $|A_n| = n!/2$.

Simplicidad de A_n. Un grupo se dice *simple* si no es trivial y no contiene subgrupos normales propios.

Observación 7.18. El interés en los grupos simples viene dado por lo siguiente. Sea G un grupo finito no trivial. Si G no es simple, entonces G contiene algún subgrupo propio normal maximal[7] G_1 (alcanza con tomar un subgrupo normal propio de orden máximo). Si G_1 no es simple, entonces G_1 contiene algún subgrupo propio normal maximal G_2, y así seguimos. Como G es finito y los órdenes verifican $|G| > |G_1| > |G_2| > \cdots$, entonces existe un cierto n tal que $G \supsetneq G_1 \supsetneq \cdots \supsetneq G_n$ y G_n es simple. Notar que de la maximalidad de los G_i se deduce que cada grupo cociente G_i/G_{i+1} es un grupo simple. Luego probamos que para todo grupo finito G, existe una cadena de subgrupos

$$G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq \cdots \supsetneq G_n \supsetneq G_{n+1} = \{1\}$$

tal que $G_{i+1} \lhd G_i$ y G_i/G_{i+1} es un grupo simple, para todo $i = 0, \ldots, n$. Esto es lo que se llama una *serie de composición* de G. Se prueba que dos series de composición de un mismo grupo siempre tienen la misma cantidad de términos y los grupos cocientes son isomorfos (aunque no necesariamente en el mismo orden). Los grupos simples finitos están clasificados. Esto se terminó en 2004.

[7] Por *maximal* nos referimos a que no está contenido propiamente en ningún subgrupo propio normal.

Observaciones 7.19. 1. Si G es un grupo abeliano finito, entonces el teorema de Cauchy implica que G es simple si y solo si G tiene orden primo (y por lo tanto es cíclico).

2. Observar que $|A_3| = 3$, luego A_3 es simple. Es un ejercicio el probar que $N \lhd A_4$, siendo

$$N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

luego A_4 no es simple.

Teorema 7.20. *Si $n = 3$ o $n \geq 5$, entonces el grupo alternado A_n es simple.*

La prueba de este teorema está en el apéndice B.

8. Subgrupos de Sylow

En esta sección los grupos son finitos.

Si G es un grupo y $H < G$, entonces $|H|$ divide a $|G|$ (teorema de Lagrange). La pregunta que nos hacemos es si vale el recíproco, es decir si dado un divisor m de $|G|$, entonces existe $H < G$ tal que $|H| = m$.
Si el grupo es abeliano, la respuesta es afirmativa (ver más adelante el corolario 8.19).
Si el grupo no es abeliano, la respuesta en general es negativa. Un ejemplo es el grupo alternado A_4 (de orden 12) que no tiene subgrupos de orden 6. Además, si $n \geq 5$ el grupo alternado A_n tiene orden $\frac{n!}{2}$ y es simple, por lo que no puede tener subgrupos de orden $\frac{n!}{4}$.
Por otro lado el teorema de Cauchy dice que si un número primo p divide a $|G|$, entonces existe $H < G$ tal que $|H| = p$. Probaremos que este resultado se puede generalizar para todo n tal que p^n divide a $|G|$.

Sea p un número primo. Un *p-grupo* es un grupo de orden p^n para algún $n = 0, 1, \ldots$

Proposición 8.1. *Si $|G| = p^2$, con p primo, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ o $G \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. En particular G es abeliano.*

Dem. Si $g \in G$ y $g \neq 1$, entonces $|g| = p$ o $|g| = p^2$. Si existe $g \in G$ tal que $|g| = p^2$, entonces $G = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$. Supongamos ahora que para todo $1 \neq g \in G$, es $|g| = p$. Sea $H < G$ tal que $|H| = p$. Sea $f \notin H$ y $N = \langle f \rangle$. Notar que $N \cap H = \{1\}$, luego $|G| = |NH|$ y por lo tanto $G = NH$. Al ser $[G : N] = [G : H] = p$, el corolario 6.25 implica $H \lhd G$ y $N \lhd G$. Luego la proposición 6.6 implica $G = NH \simeq N \times H \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. □

Observación 8.2. Si p es un primo y $|G| = p$, entonces G es cíclico, y si $|G| = p^2$, entonces G es abeliano. Eso es lo más que podemos afirmar, ya que los grupos D_4 y Q tienen orden $8 = 2^3$ y no son abelianos.

Proposición 8.3. *Si G es un p-grupo que actúa en un conjunto finito X, entonces*

$$\left|X^G\right| \equiv |X| (\text{mód } p).$$

Dem. Si la acción es trivial, es $X^G = X$. Si no, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$|X| = \left|X^G\right| + \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}], \text{ con } [G : G_{x_i}] > 1, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Como G es un p-grupo, entonces p divide a $[G : G_{x_i}]$, para todo i. Esto implica la tesis. □

Corolario 8.4. *Si G es un p-grupo no trivial, entonces su centro $Z(G)$ es no trivial.*

Dem. Considerando G actuando sobre sí mismo por conjugación, aplicando la proposición anterior deducimos que p divide a $|Z(G)|$. Al ser $|Z(G)| \neq 0$, se tiene $|Z(G)| \geq p$. □

Recordar que si G es un grupo cualquiera y $H < G$ es tal que $H \subset Z(G)$, entonces $H \lhd G$.

Proposición 8.5. *Si G es un p-grupo no trivial, entonces existe una torre de subgrupos*

$$\{1\} = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G \tag{10}$$

tal que $G_i \lhd G$ y $|G_i| = p^i$, para todo $i = 0, \ldots, n$.

Dem. Lo probaremos por inducción en n, siendo $|G| = p^n$.

Si $n = 1$, es $|G| = p$; luego $\{1\} = G_0 < G_1 = G$ verifica la tesis. Supongamos que es $|G| = p^n$, $n > 1$, y que la tesis es válida para grupos de orden p^{n-1}. Como G es un p-grupo no trivial, entonces $Z(G)$ es no trivial. Luego existe $H < Z(G)$ tal que $|H| = p$. Al ser $H < Z(G)$, es $H \lhd G$; luego G/H es un grupo de orden p^{n-1} y aplicando la hipótesis inductiva sabemos que existe una torre de subgrupos

$$\{\overline{1}\} = \tilde{G}_0 < \tilde{G}_1 < \cdots < \tilde{G}_{n-1} = G/H$$

tal que $\tilde{G}_i \lhd G/H$ y $|\tilde{G}_i| = p^i$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Esto implica que existe una torre de subgrupos

$$H = \hat{G}_0 < \hat{G}_1 < \cdots < \hat{G}_{n-1} = G$$

tal que $\hat{G}_i \lhd G$ y $\tilde{G}_i = \hat{G}_i/H$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Observar $\left|\hat{G}_i\right| = \left|\tilde{G}_i\right| \times |H| = p^{i+1}$, para todo i. Luego la tesis se obtiene definiendo $G_0 = \{1\}$ y $G_i = \hat{G}_{i-1}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Observación 8.6. Los subgrupos de la torre (10) verifican $G_i/G_{i-1} \simeq \mathbb{Z}_p$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego forman una serie de composición de G.

Sea G un grupo y p un primo. Un *p-subgrupo* de G es un subgrupo de orden p^n, para algún $n \in \mathbb{N}$. Un *p-subgrupo de Sylow* de G es p-subgrupo de orden p^n, siendo n el mayor natural tal que p^n divide a $|G|$. Notar que los p-subgrupos de Sylow son elementos maximales de la familia de p-subgrupos del grupo.

Observación 8.7.

1. Si $H < G$ es un p-subgrupo, entonces H es un p-grupo.
2. Si G es un p-grupo, entonces G es el único p-subgrupo de Sylow de G.
3. Si p no divide a $|G|$, entonces el único p-subgrupo que tiene G es el trivial.

Teorema 8.8 (Primer teorema de Sylow)**.** *Si G es un grupo y p es un primo, entonces G contiene un p-subgrupo de Sylow.*

Dem. La prueba es por induccción en $|G|$. Si $|G| = 1$, entonces $G = \{1\}$ es su propio p-subgrupo de Sylow. Sea ahora G un grupo no trivial y supongamos que sabemos que todo grupo de orden menor que $|G|$ contiene algún p-subgrupo de Sylow.

Si p no divide a $|G|$, entonces el único p-subgrupo que tiene G es el trivial y ya está probado.
Supongamos ahora $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$ y $n \geq 1$. El grupo G puede ser abeliano o no. Si G no es abeliano, entonces aplicando la ecuación de las clases obtenemos

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{m} [G : C_G(x_i)], \text{ con } [G : C_G(x_i)] > 1, \ \forall i = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

para ciertos $x_1, \ldots, x_m \in G$. Tenemos dos posibilidades:

1. $p \mid [G : C_G(x_i)]$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

2. Existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $p \nmid [G : C_G(x_{i_0})]$.

Caso 1: Como p divide a $|G|$, se deduce de (11) que p divide a $|Z(G)|$. Aplicando el teorema de Cauchy a $Z(G)$ sabemos que existe $H < Z(G)$ tal que $|H| = p$. Al ser $H < Z(G)$, es $H \lhd G$. Entonces G/H es un grupo de orden $p^{n-1}k$ y aplicando la hipótesis inductiva deducimos que tiene un subgrupo $\tilde{K}$ de orden p^{n-1}. El subgrupo $\tilde{K}$ es de la forma $\tilde{K} = K/H$, siendo $H < K < G$. Luego $|K| = \left|\tilde{K}\right||H| = p^n$ y por lo tanto K es un p-subgrupo de Sylow de G.

Caso 2: Si llamamos $L = C_G(x_{i_0})$, es $L < G$ y $p \nmid [G : L]$. Al ser $|G| = [G : L]|L|$, deducimos que existe r tal que $|L| = p^n r$ y $p \nmid r$. Como $[G : L] > 1$, se deduce $|L| < |G|$, luego aplicando la hipótesis inductiva deducimos que L tiene un subgrupo M de orden p^n y por lo tanto M es un p-subgrupo de Sylow de G.

Si G es abeliano, entonces $G = Z(G)$ y se aplica el razonamiento del Caso 1 anterior. □

Corolario 8.9. *Si G es un grupo y p es un primo tal que $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$, entonces G tiene subgrupos de orden p^l, para todo $l = 0, 1, \dots, n$.*

Dem. Aplicar el teorema 8.8 y la proposición 8.5. □

Recordar que el normalizador de un subgrupo H de G es $N_G(H) = \{g \in G : \ gHg^{-1} = H\}$ y es el mayor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal.

Lema 8.10. *Sean G un grupo, p un primo que divide a $|G|$, H un p-subgrupo de G y S un p-subgrupo de Sylow de G. Si $H \subset N_G(S)$, entonces $H \subset S$.*

Dem. Como es $H \subset N_G(S)$, entonces la proposición 6.23 implica $HS < G$. Observar que vale

$$|HS| = \frac{|H| \cdot |S|}{|H \cap S|} = [H : H \cap S] \cdot |S| = p^l |S|, \text{ siendo } [H : H \cap S] = p^l.$$

Luego HS es un p-subgrupo de G de orden $p^l|S|$. Como S es un p-subgrupo de Sylow de G, la única posibilidad es $l = 0$ y por lo tanto $H = H \cap S$, lo cual equivale a $H \subset S$. □

A la cantidad de p-subgrupos de Sylow de un grupo G la escribiremos n_p.

Teorema 8.11 (Segundo teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo y p un primo que divide a $|G|$. Entonces.*

1. *Todo p-subgrupo de G está contenido en algún p-subgrupo de Sylow.*
2. *Todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados.*
3. *Vale $n_p \equiv 1 (\text{mód } p)$.*

Dem. Sea $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$ y consideramos G actuando por conjugación en el conjunto de sus subgrupos.

Sea S un p-subgrupo de Sylow de G fijo. Sea $\mathcal{S} = \{gSg^{-1} : \ g \in G\}$ la órbita de S. Notar $|gSg^{-1}| = |S|$, para todo $g \in G$. Luego $\mathcal{S}$ está formada por p-subgrupos de Sylow de G. En la proposición 6.22 vimos que el estabilizador de S es el normalizador $N_G(S)$, luego $|\mathcal{S}| = [G : N_G(S)]$. Observar que es $S < N_G(S) < G$ y valen $|S| = p^n$ y $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$. Luego de $[G : N_G(S)][N_G(S) : S] = [G : S] = k$, deducimos $p \nmid |\mathcal{S}|$.

Sea H un p-subgrupo arbitrario. Consideremos la acción por conjugación de H en $\mathcal{S}$. Como H es un p-grupo, la proposición 8.3 implica $\left|\mathcal{S}^H\right| \equiv |\mathcal{S}| (\text{mód } p)$ y al ser $p \nmid |\mathcal{S}|$, se deduce $\mathcal{S}^H \neq \emptyset$.
Sea $Q \in \mathcal{S}^H$. Entonces Q es un p-subgrupo de Sylow y vale $hQh^{-1} = Q$, para todo $h \in H$. Luego $H \subset N_G(Q)$ y entonces el lema 8.10 implica $H \subset Q$. Esto prueba la primera afirmación.

Supongamos ahora que H es además un p-subgrupo de Sylow. Como H y Q son p-subgrupos de Sylow y $H \subset Q$, es $H = Q$. Pero $Q \in \mathcal{S}$, luego existe $g \in G$ tal que $H = gSg^{-1}$. Esto prueba la segunda afirmación y muestra que $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los p-subgrupos de Sylow de G. En particular es $n_p = |\mathcal{S}|$.
Además probamos que si $Q \in \mathcal{S}^H$, entonces $Q = H$; luego $\mathcal{S}^H = \{H\}$. Entonces de $\left|\mathcal{S}^H\right| \equiv |\mathcal{S}|(\text{mód } p)$ se deduce $|\mathcal{S}| \equiv 1(\text{mód } p)$, que es la tercera afirmación. □

Observación 8.12. Si dos subgrupos de un grupo son conjugados, entonces son isomorfos como grupos, dado que uno es la imagen del otro por medio de un automorfismo interno. Luego el teorema anterior implica que, para cada primo p, los p-subgrupos de Sylow de un grupo son isomorfos entre sí.

Un subgrupo H de un grupo G se dice que es *característico* si verifica $\varphi(H) = H$, para todo $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Es fácil de probar que todo subgrupo característico es normal y que si H es el único subgrupo de G de de orden $|H|$, entonces H es un subgrupo característico de G. El ser característico es una condición más fuerte que la normalidad, dado que hay subgrupos normales que no son característicos.

Corolario 8.13. *Sea G un grupo, p un primo que divide a $|G|$ y S un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$S \text{ es normal}; \quad S \text{ es característico}; \quad n_p = 1.$$

Dem. Sea $|G| = p^m k$, con $p \nmid k$ y $m \geq 1$. Si $n_p = 1$, entonces S es el único subgrupo de G de de orden p^m y por lo tanto S es un subgrupo característico. Ya sabemos que si S es característico, entonces S es normal. Si S es normal, entonces todos sus conjugados coinciden con S, y como los conjugados de S son todos los p-subgrupos de Sylow, deducimos $n_p = 1$. □

Observación 8.14. Si S es un p-subgrupo de Sylow, entonces la proposición 6.22 implica

$$n_p = [G : N_G(S)].$$

Luego de $S < N_G(S) < G$, se deduce $n_p \mid [G : S]$. Por lo tanto si $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$, entonces

$$n_p \mid k \qquad \text{y} \qquad n_p \equiv 1(\text{mód } p). \tag{12}$$

En los ejemplos que siguen se utilizan las fórmulas (12) para determinar los posibles valores de cada n_p. En general usaremos S_p para denotar un p-subgrupo de Sylow del grupo considerado.

Ejemplo 8.15. Probaremos que si $|G| = 11^2 13^2$, entonces G es abeliano. La única posibilidad es $n_{11} = n_{13} = 1$. Luego $S_{11} \lhd G$ y $S_{13} \lhd G$. Al ser $|S_{11}| = 11^2$ y $|S_{13}| = 13^2$, se deduce que ambos son abelianos y $S_{11} \cap S_{13} = \{1\}$. Luego $G = S_{11}S_{13} \simeq S_{11} \times S_{13}$.

Ejemplo 8.16. Probaremos que si $|G| = 30$, entonces G contiene un subgrupo de orden 15 (que es normal por tener índice 2). Es $n_3 = 1$ o 10 y $n_5 = 1$ o 6. Si fuesen $n_3 = 10$ y $n_5 = 6$, entonces tendríamos 20 elementos de orden 3 (cada 3-subgrupo de Sylow es de orden 3 y por lo tanto tiene dos elementos de orden 3) y tendríamos 24 elementos de orden 5 (por lo mismo), eso nos da $20 + 24 = 44$, que es más que el orden de G. Luego ese caso no es posible y por lo tanto $n_3 = 1$ o $n_5 = 1$. Entonces $S_3 \lhd G$ o $S_5 \lhd G$ y por lo tanto $H = S_3 S_5$ es un subgrupo de G de orden 15.

Ejemplo 8.17. Probaremos que si $|G| = 72 = 2^3 \times 3^2$, entonces G no es simple. Es $n_3 = 1$ o 4. Si $n_3 = 1$, entonces $S_3 \lhd G$. Si $n_3 = 4$, entonces $[G : N_G(S_3)] = 4$ y por lo tanto $|G| \nmid [G : N_G(S_3)]!$. Luego existe $\{1\} \neq K \subset N_G(S_3) \subsetneq G$ tal que $K \lhd G$.

Proposición 8.18. *Si todos los subgrupos de Sylow de G son normales, entonces G es isomorfo a su producto directo. Además si un natural m divide a $|G|$, entonces existe $H < G$ tal que $|H| = m$.*

Dem. Sean $p_1, \dots, p_r$ los primos que dividen al orden de G y $S_1, \dots, S_r$ los subgrupos de Sylow correspondientes. Como $S_1, \dots, S_r$ son normales y sus órdenes son primos dos a dos, se deduce que su producto $S_1 \cdots S_r$ es un subgrupo normal de G isomorfo a $S_1 \times \cdots \times S_r$ (esto es un ejercicio). Por otro lado es claro que vale $|S_1 \cdots S_r| = |G|$, luego $G = S_1 \cdots S_r \simeq S_1 \times \cdots \times S_r$.
Para la segunda afirmación, si $|G| = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ y m divide a $|G|$, entonces existen naturales $k_i \leq n_i$, $i = 1, \dots, r$ tales que $m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$. Para cada i, aplicando la proposición 8.5 obtenemos que S_i contiene algún subgrupo H_i de orden $p_i^{k_i}$. Como $H_1 \times \cdots \times H_r$ es un subgrupo de $S_1 \times \cdots \times S_r \simeq G$, entonces $H := H_1 \cdots H_r$ es un subgrupo de G de orden m. □

Corolario 8.19. *Sea G un grupo abeliano. Si m divide a $|G|$, entonces existe $H < G$ tal que $|H| = m$.* □

Proposición 8.20. *Si $|G| = pq$, con $p < q$ primos tales que $q \not\equiv 1 (\text{mód } p)$, entonces G es cíclico.*

Dem. Consideremos los subgrupos de Sylow S_p y S_q. Como es $p < q$ y $[G : S_q] = p$, entonces $S_q \lhd G$. Por otro lado sabemos que la cantidad n_p de p-subgrupos de Sylow verifica $n_p \mid q$ y $n_p \equiv 1 (\text{mód } p)$. Como q es primo y $n_p \mid q$, entonces $n_p = 1$ o $n_p = q$. Si fuese $n_p = q$, entonces sería $q \equiv 1 (\text{mód } p)$ contradiciendo la hipótesis. Luego es $n_p = 1$ y por lo tanto S_p es normal en G. Sean $S_p = \langle a \rangle$ y $S_q = \langle b \rangle$, con $|a| = p$ y $|b| = q$. Aplicando la proposición 6.4 obtenemos $ab = ba$. Luego $|ab| = pq$ y por lo tanto $G = \langle ab \rangle$. □

Observación 8.21. En el apéndice A se verá la clasificación completa de los grupos de orden pq.

9. Grupos abelianos finitos

Recordar que estamos usando C_n para escribir para los grupos cíclicos finitos de orden n.

Teorema 9.1 (Teorema de estructura)**.** *Si $G \neq \{1\}$ es un grupo abeliano finito, entonces existen primos $p_1, \dots, p_r$ y enteros $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}^+$ tales que*

$$G \simeq C_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times C_{p_r^{n_r}}.$$

Esta factorización es única a menos del orden de los factores, pero pueden aparecer elementos repetidos. □

Observaciones 9.2.

1. La prueba del teorema anterior es delicada y la omitiremos. Este teorema es parte del teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados (ver [2]). A su vez, este último se puede ver como un caso particular del teorema de estructura de módulos finitamente generados sobre dominios de ideales principales (ver [1] o [2]).

2. Observar que si $G \simeq C_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times C_{p_r^{n_r}}$, entonces $|G| = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$. Esto permite obtener las posibles factorizaciones de G (si conocemos su orden).

3. Si m y n son primos entre sí, entonces $C_m \times C_n \simeq C_{mn}$ es cíclico. Luego si $p_1, \dots, p_k$ son primos distintos, entonces $C_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times C_{p_k^{n_k}} \simeq C_{p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}}$ es cíclico. En contraposición, notar $C_p \times C_p \not\simeq C_{p^2}$.

4. Si G es un grupo abeliano de orden ${p_1}^{n_1} \cdots {p_k}^{n_k}$, entonces la proposición 8.18 implica $G \simeq S_1 \times \cdots \times S_k$, siendo S_i el p_i-subgrupo de Sylow correspondiente (notar $|S_i| = p_i^{n_i}$). Esto prueba parte de la existencia de la factorización del teorema. Lo difícil es probar que si G es abeliano de orden p^n, entonces existen únicos enteros positivos $m_1, \dots, m_k$ tales que $G \simeq C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$.

Ejemplo 9.3. Sea G un grupo abeliano de orden 72. Al ser $72 = 2^3 \times 3^2$, entonces el teorema de estructura implica que G es isomorfo a uno y solo uno de de los siguientes

$$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3; \quad C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3; \quad C_8 \times C_3 \times C_3; \quad C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9; \quad C_4 \times C_2 \times C_9; \quad C_8 \times C_9.$$

10. Grupos de orden menor o igual que 15

En esta sección clasificaremos todos los grupos de orden menor o igual que 15. El teorema de estructura nos dice cómo son los abelianos. Luego lo que necesitamos es determinar los no abelianos.

Empezamos recordando algunos resultados.

- Si $|G| = p$, p primo, entonces G es cíclico (C_p).
- Si $|G| = p^2$, p primo, entonces G es abeliano (C_{p^2} o $C_p \times C_p$).
- Si $|G| = 2p$, siendo p un primo impar, entonces G es cíclico (C_{2p}) o diedral (D_p).
- Si $|G| = pq$, con $p < q$ primos y $q \not\equiv 1(\text{mód } p)$, entonces G es cíclico (C_{pq}).

Si aplicamos lo anterior a los grupos de orden menor o igual que 15, obtenemos:

- Los grupos de orden 2, 3, 5, 7, 11 o 13 son cíclicos.
- Los grupos de orden 4 o 9 son abelianos.
- Los grupos de orden 6, 10 o 14 son cíclicos o diedrales.
- Los grupos de orden 15 son cíclicos.

Luego solo nos resta clasificar los grupos no abelianos de orden 8 y los de orden 12.

Teorema 10.1. *A menos de isomorfismo hay solo dos grupos no abelianos de orden 8, el diedral D_4 y el grupo de los cuaternios Q.*

Dem. Sea G un grupo no abeliano de orden 8. Si $g^2 = 1$ para todo $g \in G$, entonces G sería abeliano. Tampoco puede tener elementos de orden 8 porque sería cíclico. Luego existe $a \in G$ de orden 4. Observar que $\langle a \rangle$ tiene índice 2, luego es normal. Sea $b \in G$ tal que $b \notin \langle a \rangle$, entonces

$$G = \langle a \rangle \sqcup b\langle a \rangle = \left\{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\right\}.$$

Como $\langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$ es normal y bab^{-1} tiene el mismo orden que a, deducimos $bab^{-1} = a$ o $bab^{-1} = a^3$. Si fuese $bab^{-1} = a$, sería $ba = ab$ y esto implicaría que $G = \langle a, b \rangle$ es abeliano, lo cual no es el caso; luego $bab^{-1} = a^3$. Notar que de $G = \langle a \rangle \sqcup b\langle a \rangle$ se deduce $b^2 \in \langle a \rangle$. Si fuese $b^2 = a$ o $b^2 = a^3$, sería $|b| = 8$ que no es posible; luego $b^2 = 1$ o $b^2 = a^2$.

Resumiendo tenemos dos posibilidades:

- $G = \langle a, b \rangle$, con $|a| = 4$, $ba = a^3b$ y $b^2 = 1$, luego $G \simeq D_4$.
- $G = \langle a, b \rangle$, con $|a| = 4$, $ba = a^3b$ y $b^2 = a^2$, luego $G \simeq Q$. □

Observación 10.2. Es fácil de probar que Q y D_4 no son isomorfos (por ejemplo, todos los subgrupos de Q son normales, lo cual no sucede en D_4).

En lo que sigue estudiaremos los grupos de orden 12. Para eso necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 10.3. *Existe un grupo no abeliano de orden 12, que escribimos*[8] $C_3 \rtimes C_4$*, el cual se puede describir mediante* $C_3 \rtimes C_4 = \langle a, b : \ a^4 = b^3 = 1, \ ab = b^2 a \rangle$.

Dem. Consideremos el grupo simétrico $\mathcal{S}_7$. Sean $a = (23)(4567)$ y $b = (123)$. Vale $|a| = 4$ y $|b| = 3$. Es fácil de ver que $ab \neq ba$ y además $aba^{-1}b = 1$, luego $aba^{-1} = b^{-1}$, lo cual equivale a $ab = b^2 a$. Como $aba^{-1} \in \langle b \rangle$, entonces $\langle a \rangle \subset N_{\mathcal{S}_7}(\langle b \rangle)$ (el normalizador en $\mathcal{S}_7$ de $\langle b \rangle$). Esto implica $\langle a \rangle \langle b \rangle < \mathcal{S}_7$ y por lo tanto $\langle a \rangle \langle b \rangle$ es un grupo. Como es $\text{mcd}\,(|a|, |b|) = 1$, deducimos $|\langle a \rangle \langle b \rangle| = 12$, luego $C_3 \rtimes_\alpha C_4 := \langle a, b \rangle$ verifica la tesis. □

Teorema 10.4. *A menos de isomorfismo hay exactamente tres grupos no abelianos de orden 12, el diedral* D_6*, el alternado* A_4 *y el grupo* $C_3 \rtimes C_4$.

Dem. Sea G un grupo no abeliano de orden 12. Sea H un subgrupo de G de orden 3.

Supongamos que H no es normal en G. Consideremos el morfismo $\alpha : G \to \text{Biy}(G/H) \simeq \mathcal{S}_4$ asociado a la acción de G en G/H definida por $g \cdot (fH) = gfH$. En la proposición 6.24 vimos que vale $\text{Ker}\,(\alpha) \subset H$. Si α no fuese inyectivo, entonces sería $H = \text{Ker}\,(\alpha)$, lo cual no es posible porque H no es normal. Luego α es inyectivo y por lo tanto $[\mathcal{S}_4 : \alpha(G)] = 2$. Como A_4 es el único subgrupo de índice 2 de $\mathcal{S}_4$, se deduce $G \simeq \alpha(G) = A_4$.

Supongamos que H es normal. Sea K un 2-subgrupo de Sylow de G. Observar que $|H \cap K| = 1$, luego $G = HK$, siendo $H \cap K = \{1\}$. Notar que H es cíclico y K es abeliano. Si K fuese normal, entonces $G \simeq H \times K$ sería abeliano. Luego K no es normal. Notar que al ser $|K| = 4$, es $K = C_4$ o $K \simeq C_2 \times C_2$. Como los 2-subgrupos de Sylow son conjugados (y por lo tanto isomorfos), entonces todos los subgrupos de orden 4 de G son de una forma o de la otra. Sea $H = \langle z \rangle$, con $|z| = 3$.

Si $K = C_4$, entonces es $K = \langle t \rangle$, con $|t| = 4$. Notar que $G = HK$ implica $G = \langle z, t \rangle$.
Como $H = \langle z \rangle$ es normal, entonces $tzt^{-1} \in H$. Además vale $\left|tzt^{-1}\right| = |z| = 3$. Luego $tzt^{-1} = z$ o $tzt^{-1} = z^2$, lo cual equivale a $tz = zt$ o $tz = z^2 t$.
Si fuese $tz = zt$, al ser $G = \langle z, t \rangle$ obtendríamos que G es abeliano, contra lo supuesto. Luego es $tz = z^2 t$. Entonces G está generado por z y t que verifican $|z| = 3$, $|t| = 4$ y $tz = z^2 t$, luego $G \simeq C_3 \rtimes C_4$.

Supongamos ahora $K \simeq C_2 \times C_2$. Luego es $K = \{1, x, y, xy\}$, con $|x| = |y| = 2$, $xy = yx$. Razonando como antes obtenemos $G = \langle x, y, z \rangle$. Probaremos $K \cap Z(G) \neq \{1\}$.
Como $H = \langle z \rangle$ es normal, entonces el mismo razonamiento que hicimos para t aplicado a x e y implica que valen $xz = zx$ o $xz = z^2 x$ y $yz = zy$ o $yz = z^2 y$. Si valiesen $xz = z^2 x$ y $yz = z^2 y$, entonces

$$(xy)z = x(yz) = x(z^2 y) = (xz)zy = (z^2 x)zy = z^2(xz)y = z^2(z^2 x)y = z(xy).$$

Luego necesariamente alguno de x, y, xy conmuta con z, y como estos conmutan entre sí, entonces ese elemento está en el centro de G. Podemos suponer $x \in Z(G)$. Notar que no puede ser que también valga $y \in Z(G)$, ya que en ese caso G sería abeliano. Luego podemos asumir que valen $xz = zx$ y $yz = z^2 y$.
Sean $a = xz^2$ y $b = y$. Como x y z^2 conmutan, entonces $|a| = |x| \times |z^2| = 2 \times 3 = 6$. Además $|b| = |y| = 2$. Operando obtenemos

$$baba = y\left(xz^2\right) y\left(xz^2\right) = yx\left(z^2 y\right) xz^2 = yx(yz)xz^2 = y^2 x^2 z^3 = 1$$

Luego $ba = a^{-1}b^{-1} = a^5 b$. Recordar que es $G = \langle x, y, z \rangle$. Operando obtenemos

$$a = xz^2 \ \Rightarrow \ a^2 = x^2 z^4 = z \ \Rightarrow \ a^3 = a\, a^2 = xz^2\, z = x$$

Luego $x = a^3$, $y = b$ y $z = a^2$. Esto implica $G = \langle a, b \rangle$ y como valen $|a| = 6$, $|b| = 2$ y $ba = a^5 b$, deducimos que G es isomorfo al grupo diedral D_6. □

[8] La notación $C_3 \rtimes C_4$ viene del producto semidirecto: ver la proposición 11.6 en el apéndice A.

Observación 10.5. El producto directo $D_3 \times C_2$ tiene orden 12 y no es abeliano, por lo que tiene que ser isomorfo a alguno de los anteriores. Pensando $G = D_3C_2$, si escribimos $C_2 = \{1, x\}$ y $D_3 = \{1, y, y^2, z, zy, zy^2\}$, con $x^2 = y^3 = z = 1$ y $yz = zy^2$, entonces $\langle y \rangle$ es un subgrupo normal de orden 3 y $\langle x, z \rangle$ es un subgrupo de orden 4 del tipo $C_2 \times C_2$, luego $D_3 \times C_2 \simeq D_6$.

Resumiendo lo anterior, la lista de las clases de isomorfismo de los grupos de orden menor o igual que 15 es la siguiente.

orden	abeliano	no abeliano
1	$\{1\}$	
2	C_2	
3	C_3	
4	C_4, $C_2 \times C_2$	
5	C_5	
6	$C_6 = C_2 \times C_3$	D_3
7	C_7	
8	C_8, $C_2 \times C_4$, $C_2 \times C_2 \times C_2$	D_4, Q
9	C_9, $C_3 \times C_3$	
10	$C_{10} = C_2 \times C_5$	D_5
11	C_{11}	
12	$C_{12} = C_3 \times C_4$, $C_2 \times C_6 = C_2 \times C_2 \times C_3$	$D_6 = C_2 \times D_3$, A_4, $C_3 \rtimes C_4$
13	C_{13}	
14	$C_{14} = C_2 \times C_7$	D_7
15	$C_{15} = C_3 \times C_5$	

11. Apéndice A

En esta sección se introduce el producto semidirecto y se lo usa para probar la clasificación de los grupos de orden pq, siendo $p < q$ primos. En lo que sigue usaremos reiteradamente la proposición 6.4.

Producto semidirecto. Sea G un grupo y N y K subgrupos de G tales que $N \cap K = \{1\}$ y $G = NK$. Estas condiciones implican que todo elemento de G se escribe en forma única como producto de un elemento de N por uno de K, luego la función $\varphi : N \times K \to G$ definida por $\varphi(n, k) = nk$ es una biyección.

Si vale $N \lhd G$, entonces K actúa en N definiendo $k \cdot n = knk^{-1}$. Esta acción verifica $k \cdot (n_1 n_2) = (k \cdot n_2)(k \cdot n_2)$, luego induce un morfismo de grupos $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(N)$, dado por $\alpha_k(n) = k \cdot n$. Notar que vale

$$(n_1k_1)(n_2k_2) = n_1(k_1 \cdot n_2)k_1k_2, \qquad \forall n_1, n_2 \in N,\ k_1, k_2 \in K.$$

Luego podemos copiar mediante la biyección $\varphi : N \times K \to G$ la estructura de grupo de G, obteniendo un producto $*$ en $N \times K$ definido por

$$(n_1, k_1) * (n_2, k_2) = \big(n_1(k_1 \cdot n_2),\ k_1k_2\big), \qquad \forall n_1, n_2 \in N,\ k_1, k_2 \in K. \tag{13}$$

Con este producto $N \times K$ es un grupo y $\varphi : N \times K \to G$ es un isomorfismo de grupos.

Dado que estamos asumiendo $N \lhd G$, entonces sabemos por la observación 6.5 que es $K \lhd G$ si y solo si los elementos de K conmutan con los de N, lo cual a su vez equivale a que la acción $K \times N \dot{\to} N$ sea trivial o a que α sea el morfismo trivial. Pero en ese caso obtenemos $n_1k_1n_2k_2 = n_1n_2k_1k_2$, para todo $n_1, n_2 \in N$, $k_1, k_2 \in K$. Luego si $K \lhd G$, entonces el producto dado por (13) queda en $(n_1, k_1) * (n_2, k_2) = (n_1n_2,\ k_1k_2)$ y por lo tanto la estructura de grupo inducida en $N \times K$ es la del producto directo.

Recíprocamente, consideremos dos grupos N y K y un morfismo de grupos $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(N)$. El mapa $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(N) < \mathrm{Biy}(N)$ induce una acción $K \times N \dot{\to} N$ definida por $k \cdot n = \alpha_k(n)$. Si definimos un producto $*$ en $N \times K$ mediante (13), entonces es un ejercicio el probar que el conjunto $N \times K$ con este producto es un grupo, que se llama el *producto semidirecto* de N y K y lo escribimos $N \rtimes_\alpha K$. En $N \rtimes_\alpha K$ vale

$$(n_1, 1) * (n_2, 1) = (n_1n_2,\ 1), \quad (1, k_1) * (1, k_2) = (1,\ k_1k_2), \quad \forall n_1, n_2 \in N,\ k_1, k_2 \in K.$$

Luego si definimos $N_0 = \{(n, 1) :\ n \in N\}$ y $K_0 = \{(1, k) :\ k \in K\}$, obtenemos que N_0 y K_0 son subgrupos de $N \rtimes_\alpha K$ y los mapas $n \mapsto (n, 1)$ y $k \mapsto (1, k)$ definen isomorfismos $N \simeq N_0$ y $K \simeq K_0$. El inverso en $N \rtimes_\alpha K$ está dado por $(n, k)^{-1} = \left(\left(k^{-1} \cdot n\right)^{-1}, k^{-1}\right)$. Usando está fórmula es fácil probar que N_0 es normal en $N \rtimes_\alpha K$. Además para todo $n \in N$ y $k \in K$, valen

$$(n, 1) * (1, k) = (n, k), \quad (1, k) * (n, 1) = (k \cdot n, k), \quad (1, k) * (n, 1) * (1, k)^{-1} = (k \cdot n, 1). \tag{14}$$

luego es $N \rtimes_\alpha K = N_0K_0$ y claramente vale $N_0 \cap K_0 = \{(1, 1)\}$. Así en $N \rtimes_\alpha K$ tenemos la misma descomposición que teníamos en G.

Notar que $N \rtimes_\alpha K = N \times K$ si y solo si α es trivial. Además, si α no es trivial entonces existen $k \in K$ y $n \in N$ tales que $k \cdot n \neq n$, luego $(n, 1) * (1, k) \neq (1, k) * (n, 1)$, y por lo tanto $N \rtimes_\alpha K$ no es abeliano (aunque lo sean N y K).

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado.

Teorema 11.1. *Un grupo G verifica que existen $N \lhd G$ y $K < G$ tales que $G = NK$ y $N \cap K = \{1\}$, si y solo si G es isomorfo a un producto semidirecto $N \rtimes_\alpha K$, para cierto morfismo $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(N)$. Además $K \lhd G$ si y solo si α es el morfismo trivial si y solo si $G \simeq N \times K$.* □

Ejemplo 11.2. Consideremos el grupo diedral $D_n = \langle a, b :\ a^n = b^2 = 1,\ ab = ba^{n-1}\rangle$, $n \geq 3$. Sean $N = \langle a\rangle$ y $K = \langle b\rangle$. Es $D_n = NK$, $N \cap K = \{1\}$ y N tiene índice 2, luego es normal. Entonces

$$D_n \simeq N \rtimes_\alpha K \simeq C_n \rtimes_\alpha C_2.$$

Si escribimos los grupos cíclicos mediante $C_n = \langle a\rangle$ y $C_2 = \langle b\rangle$, entonces $\alpha : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ está definido por $\alpha_1 = \mathrm{id}$ y $\alpha_b(x) = x^{-1}$, para todo $x \in C_n$. Por otro lado, si escribimos $C_n = \mathbb{Z}_n$ y $C_2 = \mathbb{Z}_2$ (notación aditiva), entonces

$$D_n \simeq N \rtimes_\alpha K \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2.$$

y $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ está definido por $\alpha_{\overline{0}} = \mathrm{id}$ y $\alpha_{\overline{1}} = -\mathrm{id}$.

Grupos de orden pq. A continuación veremos la clasificación de los grupos de orden pq, siendo p y q primos tales que $p < q$. Recordar que ya conocemos algunos resultados parciales: si $|G| = 2p$, con p primo impar, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_{2p}$ o $G \simeq D_p$, y si $|G| = pq$, con $q \not\equiv 1 (\mathrm{mód}\ p)$, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_{pq}$.
La prueba que veremos es autocontenida y no refiere a esos casos, en particular no requiere de los teoremas de Sylow y solo se usa el producto semidirecto para probar la existencia en el caso no abeliano.

Empezamos con el siguiente resultado.

Lema 11.3. *Dados p, q primos, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$ si y solo si $q \equiv 1(\text{mód } p)$.*

Dem. Sea $r \in \mathbb{Z}$. Si r verifica $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$, entonces vale $\overline{r}^p = \overline{1}$ y $\overline{r} \neq \overline{1}$ en $\mathbb{Z}_q$. Esto implica $\overline{r} \in \mathbb{Z}_q^\times$ y como p es primo, entonces $|\overline{r}| = p$ en $\mathbb{Z}_q^\times$. Luego aplicando el teorema de Lagrange deducimos $p \mid \left|\mathbb{Z}_q^\times\right| = q - 1$, lo cual equivale a $q \equiv 1(\text{mód } p)$.

Recíprocamente, $q \equiv 1(\text{mód } p)$ implica $p \mid \left|\mathbb{Z}_q^\times\right|$. Luego aplicando el teorema de Cauchy sabemos que existe $\overline{r} \in \mathbb{Z}_q^\times$ tal que $|\overline{r}| = p$ en $\mathbb{Z}_q^\times$, lo cual equivale a $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$. □

Observación 11.4. La condición $q \equiv 1(\text{mód } p)$ equivale a $p \mid q-1$ y por lo tanto tiene que ser $p \leq q-1 < q$. Luego solo puede darse $q \equiv 1(\text{mód } p)$ cuando es $p < q$.

Teorema 11.5. *A menos de isomorfismo existen a lo más dos grupos de orden pq con $p < q$ primos: el cíclico $\mathbb{Z}_{pq}$ y uno no abeliano que admite una presentación $\langle a, b : \ a^p = b^q = 1, \ aba^{-1} = b^r \rangle$, siendo $r \in \mathbb{Z}$ tal que $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$. Esta última posibilidad solo puede ocurrir si $q \equiv 1(\text{mód } p)$.*

Dem. Sea G un grupo de orden pq. Aplicando el teorema de Cauchy sabemos que existen $a, b \in G$ tales que $|a| = p$ y $|b| = q$. Luego los subgrupos $K = \langle a \rangle$ y $N = \langle b \rangle$ verifican $|N| = q$ y $|K| = p$. Al ser p, q primos distintos deducimos $|N \cap K| = 1$, luego $|NK| = qp = |G|$ y por lo tanto $G = NK$. De esto se deduce que G está generado por a y b.

El corolario 6.25 implica que N es normal. Luego existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $aba^{-1} = b^r$. Esto equivale a escribir $\text{int}_a(b) = b^r$, siendo $\text{int}_a : G \to G$ el automorfismo interno correspondiente. Operando obtenemos

$$\text{int}_{a^2}(b) = (\text{int}_a \circ \text{int}_a)(b) = \text{int}_a\left(\text{int}_a(b)\right) = \text{int}_a\left(b^r\right) = \text{int}_a\left(b\right)^r = \left(b^r\right)^r = b^{r^2}.$$

Iterando este proceso obtenemos $\text{int}_{a^n}(b) = b^{r^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como es $a^p = 1$, obtenemos $b = b^{r^p}$. Dado que es $|b| = q$, esta última igualdad equivale a $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$. Acá tenemos dos opciones, $r \equiv 1(\text{mód } q)$ o $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$.

Si es $r \equiv 1(\text{mód } q)$, entonces $b^r = b$ y por lo tanto $aba^{-1} = b^r = b$. Esta última condición equivale a $ab = ba$. Como $|a| = p$, $|b| = q$ y $ab = ba$, entonces $|ab| = pq = |G|$. Luego $G = \langle ab \rangle$ es un grupo cíclico de orden pq y por lo tanto $G \simeq \mathbb{Z}_{pq}$.

Si es $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$, entonces el lema anterior implica que necesariamente tiene que ser $q \equiv 1(\text{mód } p)$. Como es $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$, entonces $b^r \neq b$. Luego de $ab = b^r a$ deducimos $ab \neq ba$ y por lo tanto G es un grupo no abeliano que admite la presentación de la tesis. □

Para completar la prueba del teorema anterior, se requiere demostrar que en el caso $q \equiv 1(\text{mód } p)$ existen grupos no abelianos de orden pq y que son únicos a menos de isomorfismo. Eso es lo que probaremos a continuación.

Proposición 11.6. *Si p y q son primos tales que $q \equiv 1(\text{mód } p)$, entonces existe un grupo no abeliano de orden pq.*

Dem. Es un ejercicio el probar que todo morfismo $\tau : \mathbb{Z}_p \to \text{Aut}\left(\mathbb{Z}_q\right)$ es de la forma $\tau_{\overline{k}}(x) = \overline{r}^k x$, para todo $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p, x \in \mathbb{Z}_q$, siendo $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$. Es claro que τ es no trivial si y solo si $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$. Como es $q \equiv 1(\text{mód } p)$, entonces el lema 11.3 implica que existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r^p \equiv 1(\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1(\text{mód } q)$. Luego existe un morfismo no trivial $\tau : \mathbb{Z}_p \to \text{Aut}\left(\mathbb{Z}_q\right)$ definido por $\tau_{\overline{k}}(x) = \overline{r}^k x$, para todo $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p, x \in \mathbb{Z}_q$. Como τ no es trivial, entonces el producto semidirecto $\mathbb{Z}_q \rtimes_\tau \mathbb{Z}_p$ es un grupo no abeliano de orden pq. □

El siguiente resultado prueba la unicidad. Sabemos que si G es un grupo no abeliano de orden pq, entonces G se puede describir mediante $G = \langle a, b : \ a^p = b^q = 1, \ aba^{-1} = b^r \rangle$, siendo $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r^p \equiv 1 (\text{mód } q)$ y $r \not\equiv 1 (\text{mód } q)$. Probaremos que los grupos de esta forma (que dependen del entero r) son isomorfos entre sí.

Proposición 11.7. *Sean p y q primos tales que $p < q$ y $q \equiv 1 (\text{mód } p)$. Sean r, s tales que $r^p \equiv 1 (\text{mód } q)$, $r \not\equiv 1 (\text{mód } q)$, $s^p \equiv 1 (\text{mód } q)$ y $s \not\equiv 1 (\text{mód } q)$. Entonces los grupos $G = \langle a, b : \ a^p = b^q = 1, \ aba^{-1} = b^r \rangle$ y $F = \langle \alpha, \beta : \ \alpha^p = \beta^q = 1, \ \alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^s \rangle$ son isomorfos.*

Dem. Como q es primo, entonces $\mathbb{Z}_q$ es un cuerpo y por lo tanto el polinomio $X^p - \overline{1} \in \mathbb{Z}_q[X]$ tiene a lo más p raíces en $\mathbb{Z}_q$. Luego $H = \left\{ x \in \mathbb{Z}_q : \ x^p = \overline{1} \right\}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_q^\times$ y $|H| \leq p$. Por hipótesis es $\overline{r}^p = \overline{s}^p = \overline{1}$ y $\overline{r}, \overline{s} \neq \overline{1}$ en $\mathbb{Z}_q$. Luego $\overline{r}, \overline{s} \in H$ y $|\overline{r}| = |\overline{s}| = p$. Esto implica $\langle \overline{r} \rangle = \langle \overline{s} \rangle = H \simeq \mathbb{Z}_p$. Al ser $\langle \overline{r} \rangle = \langle \overline{s} \rangle$, deducimos que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\overline{s} = \overline{r}^m$ y $\overline{r} = \overline{s}^n$ en $\mathbb{Z}_q$. Notar que de $\overline{r} = \overline{s}^n = (\overline{r}^m)^n = \overline{r}^{mn}$, se deduce $mn \equiv 1 (\text{mód } p)$. En resumen, probamos que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $r^m \equiv s (\text{mód } q)$, $s^n \equiv r (\text{mód } q)$ y $mn \equiv 1 (\text{mód } p)$.
Notar que al ser $|b| = q$, la condición $aba^{-1} = b^r$ implica $a^m b a^{-m} = b^{r^m} = b^s$. Veremos que existe un morfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi(\alpha) = a^m$ y $\varphi(\beta) = b$. Para la existencia[9] de un tal morfismo ϕ necesitamos probar que $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ verifican en G las mismas relaciones que verifican α y β en F, es decir que valen

$$\varphi(\alpha)^p = \varphi(\beta)^q = 1, \quad \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\alpha)^{-1} = \varphi(\beta)^s \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^m)^p = b^q = 1, \quad a^m b a^{-m} = b^s.$$

Por lo que vimos arriba estas últimas relaciones son válidas en G. Luego existe un morfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi(\alpha) = a^m$ y $\varphi(\beta) = b$. En forma análoga se prueba que existe un morfismo $\psi : G \to F$ tal que $\psi(a) = \alpha^n$ y $\psi(b) = \beta$. Es claro que vale $(\varphi \circ \psi)(b) = b$, y como el orden de a es p y $mn \equiv 1 (\text{mód } p)$, entonces $(\varphi \circ \psi)(a) = a^{mn} = a$. Como a y b generan a G, esto implica $\varphi \circ \psi = \text{id}$. Análogamente se prueba $\psi \circ \varphi = \text{id}$ y por lo tanto φ y ψ son inversos uno del otro. Luego G y F son isomorfos. □

12. Apéndice B

En esta sección probaremos un par de teoremas sobre el grupo simétrico, que fueron enunciados sin prueba en la sección correspondiente. Pimero probaremos el teorema 7.3. Para eso necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 12.1. *Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico y H un subgrupo no trivial de G. Sabemos que existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $H = \langle a^k \rangle$. Entonces $G/H = \left\{ \overline{1}, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1} \right\}$ es un grupo cíclico de orden k, siendo $\alpha = \overline{a} \in G/H$.*

Dem. Si $x \in G$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = a^n$, luego $\overline{x} = \overline{a^n} = \overline{a}^n = \alpha^n$. Esto prueba $G/H = \langle \alpha \rangle$. Además $a^k \in H$, luego $\alpha^k = \overline{1}$. Por otro lado

$$\alpha^m = \overline{1} \ \Rightarrow \ a^m \in H = \langle a^k \rangle \ \Rightarrow \ \exists \ q \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } m = nk \ \Rightarrow \ k \mid m.$$

Esto prueba $|\alpha| = k$. □

Teorema 12.2. *Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es una permutación distinta de la identidad, entonces σ se escribe en forma única (a menos del orden) como producto de ciclos disjuntos.*

Dem. La acción natural de $\mathcal{S}_n$ en I_n dada por $\alpha \cdot x = \alpha(x)$ induce por restricción una acción de $G := \langle \sigma \rangle < \mathcal{S}_n$ en I_n. Como es $\sigma \neq \text{id}$, entonces esta acción no es trivial. Luego la proposición 5.12 implica que existen $x_1, \ldots, x_t \in I_n$ tales que

$$I_n = o(x_1) \sqcup o(x_2) \sqcup \cdots \sqcup o(x_t) \sqcup I_n^G, \qquad I_n^G = \{x \in I_n : \ \sigma(x) = x\}. \tag{15}$$

[9] Esta es una propiedad de los grupos dados por generadores y relaciones, pero es bastante creíble y la asmimos cierta.

Sea $i \in \{1, \dots, t\}$. Sabemos que hay un biyección $G/G_{x_i} \simeq o(x_i)$ dada por $\overline{\alpha} \leftrightarrow \alpha(x_i)$, para todo $\alpha \in G$. Por otro lado, al ser $G = \langle \sigma \rangle$, entonces existe $m_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $G_{x_i} = \langle \sigma^{m_i} \rangle$. Luego $G/G_{x_i} = \left\{\overline{\mathrm{id}}, \overline{\sigma}, \overline{\sigma}^2, \dots, \overline{\sigma}^{m_i - 1}\right\}$ y $[G : G_{x_i}] = m_i$. Lo anterior implica

$$|o(x_i)| = m_i, \quad o(x_i) = \left\{x_i, \sigma(x_i), \sigma^2(x_i), \dots, \sigma^{m_i-1}(x_i)\right\}, \quad \sigma^{m_i}(x_i) = x_i.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, t\}$ consideramos el ciclo $\eta_i = \big(x_i\, \sigma(x_i)\, \sigma^2(x_i) \cdots \sigma^{m_i-1}(x_i)\big)$.
Notar que vale $\eta_i^l(x_i) = \sigma^l(x_i)$, para todo l, i. Además, como las órbitas son disjuntas, entonces $\eta_1, \dots, \eta_t$ son ciclos disjuntos.
A continuación usando (15) probaremos $\sigma = \eta_1 \cdots \eta_t$. Sea $x \in I_n$. Si $x \in I_n^G$, entonces $\sigma(x) = \eta_1 \cdots \eta_t(x) = x$. En caso contrario, vale $x \in o(x_i)$ para algún i y por lo tanto $x = \sigma^l(x_i) = \eta_i^l(x_i)$ para algún l. Luego, teniendo en cuenta que vale $\eta_k(x_i) = x_i$ si $k \neq i$, obtenemos

$$(\eta_1 \cdots \eta_t)(x) = (\eta_i \eta_1 \cdots \eta_{i-1} \eta_{i+1} \cdots \eta_t)(x) = \eta_i(x) = \eta_i\big(\eta_i^l(x_i)\big) = \eta_i^{l+1}(x_i) = \sigma^{l+1}(x_i) = \sigma\big(\sigma^l(x_i)\big) = \sigma(x).$$

Luego $\sigma = \eta_1 \cdots \eta_t$.

Recíprocamente, supongamos $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$, siendo $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ ciclos disjuntos. Consideremos la acción de $G = \langle \sigma \rangle < \mathcal{S}_n$ en I_n. Si $\gamma_k = (i_1 \dots i_r)$, entonces $o(i_1) = \cdots = o(i_r) = \{i_1, \dots, i_r\}$. Luego las órbitas con más de un punto son los conjuntos formados por las componentes de $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, y el conjunto de puntos fijos es su complemento. Esto prueba la unicidad. □

A continuación probaremos que si $n \geq 5$, entonces A_n es simple.

Lema 12.3. *Si $n \geq 3$, entonces A_n es el subgrupo de $\mathcal{S}_n$ generado por los 3-ciclos.*

Dem. Sabemos que A_n contiene a todos los 3-ciclos de $\mathcal{S}_n$. Además, como todo elemento de A_n es producto de un número par de trasposiciones, entonces la tesis se deduce de las siguientes igualdades

$$(ab)(bc) = (abc), \qquad (ab)(cd) = (ab)(bc)\,(bc)(cd) = (abc)(bcd). \quad \square$$

Lema 12.4. *Si $n \geq 5$, entonces todos los 3-ciclos son conjugados entre sí dentro de A_n.*

Dem. Sean (abc) e (ijk) dos 3-ciclos. Sabemos que existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $(ijk) = \sigma(abc)\sigma^{-1}$. Si $\sigma \in A_n$, entonces ya está probado. Si no, sean $d, e \in I_n$ distintos de a, b, c. Entonces $\sigma(de) \in A_n$ y

$$\sigma(de)(abc)\big(\sigma(de)\big)^{-1} = \sigma(de)(abc)(de)\sigma^{-1} = \sigma(abc)\sigma^{-1} = (ijk). \quad \square$$

Ejercicio 12.5. Sea G un grupo. Recordar que el *conmutador* de $g, f \in G$ es $[g, f] = gfg^{-1}f^{-1}$. Probar.

1. Si $g, f, h \in G$ y $gh = hg$, entonces $[g, fh] = [g, f]$.
2. Si $N \lhd G$, $n \in N$ y $g \in G$, entonces $[g, n] \in N$ y $[n, g] \in N$.

Teorema 12.6. *Si $n = 3$ o $n \geq 5$, entonces el grupo alternado A_n es simple.*

Dem. Para $n = 3$ ya lo sabemos. Supongamos $n \geq 5$ y sea $N \lhd A_n$, $N \neq \{\mathrm{id}\}$. Si probamos que N contiene un 3-ciclo, entonces de los lemas 12.3 y 12.4 se deduce $N = A_n$, que es lo que queremos probar.

Como $N \neq \{\mathrm{id}\}$, entonces existe $\sigma \in N$, $\sigma \neq \mathrm{id}$. Sea $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$ su descomposición en ciclos disjuntos. Tenemos cuatro casos posibles:

1. Existe i tal que $|\gamma_i| \geq 4$.
2. $|\gamma_i| \leq 3$, para todo $i = 1, \ldots, r$ y existen $i \neq j$ tales que $|\gamma_i| = |\gamma_j| = 3$.
3. $|\gamma_i| \leq 3$, para todo $i = 1, \ldots, r$ y existe un único i_0 tal que $|\gamma_{i_0}| = 3$.
4. $|\gamma_i| = 2$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Caso 1: Es $\sigma = (a_1 \cdots a_l)\gamma_2 \cdots \gamma_r$, con $l \geq 4$. Como $\alpha = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$, entonces $[\alpha, \sigma] \in N$. Notar que $(a_1 a_2 a_3)$ y $\gamma_2 \cdots \gamma_r$ conmutan. Luego aplicando el ejercicio anterior y la proposición 7.6 obtenemos

$$\begin{aligned}[\alpha, \sigma] &= [(a_1 a_2 a_3), (a_1 \cdots a_l)\gamma_2 \cdots \gamma_r] = [(a_1 a_2 a_3), (a_1 \cdots a_l)] = (a_1 a_2 a_3)(a_1 \cdots a_l)(a_3 a_2 a_1)(a_1 \cdots a_l)^{-1} \\ &= (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_3 a_2) = (a_1 a_2 a_4).\end{aligned}$$

Luego $(a_1 a_2 a_4) \in N$.

Caso 2: Es $\sigma = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_5)\gamma_3 \cdots \gamma_r$. Si $\alpha = (a_1 a_2 a_4) \in A_n$, entonces razonando como antes obtenemos

$$\begin{aligned}[\alpha, \sigma] &= [(a_1 a_2 a_4), (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_5)\gamma_3 \cdots \gamma_r] = [(a_1 a_2 a_4), (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_5)] \\ &= (a_1 a_2 a_4)\big((a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_5)\big)(a_4 a_2 a_1)\big((a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_5)\big)^{-1} \\ &= (a_1 a_2 a_4)(a_5 a_3 a_2) = (a_1 a_2 a_5 a_3 a_4).\end{aligned}$$

Luego $(a_1 a_2 a_5 a_3 a_4) \in N$ y caemos en el caso 1.

Caso 3: Es $\sigma = (a_1 a_2 a_3)\gamma_2 \cdots \gamma_r$, siendo $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ trasposiciones. Luego $N \ni \sigma^2 = (a_1 a_2 a_3)^2 = (a_3 a_2 a_1)$.

Caso 4: Es $\sigma = (a_1 a_2)(a_3 a_4)\gamma_3 \cdots \gamma_r$, siendo $\gamma_3, \ldots, \gamma_r$ trasposiciones. Si $\alpha = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$, es

$$\begin{aligned}[\alpha, \sigma] &= [(a_1 a_2 a_3), (a_1 a_2)(a_3 a_4)\gamma_3 \cdots \gamma_r] = [(a_1 a_2 a_3), (a_1 a_2)(a_3 a_4)] \\ &= (a_1 a_2 a_3)\big((a_1 a_2)(a_3 a_4)\big)(a_3 a_2 a_1)\big((a_1 a_2)(a_3 a_4)\big)^{-1} = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_1 a_2) = (a_1 a_3)(a_2 a_4).\end{aligned}$$

Luego $(a_1 a_3)(a_2 a_4) \in N$. Como $n \geq 5$, existe $b \in I_n$ tal que $b \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Si $\beta = (a_1 a_3 b) \in A_n$, es

$$[(a_1 a_3 b), (a_1 a_3)(a_2 a_4)] = [(a_1 a_3 b), (a_1 a_3)] = (a_1 a_3 b)(a_1 a_3)(a_1 a_3 b)^{-1}(a_1 a_3) = (a_3 b)(a_1 a_3) = (a_1 b a_3).$$

Luego $(a_1 b a_3) \in N$. □

Referencias

[1] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag.

[2] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1993.