Práctico 1
A. Oscilaciones

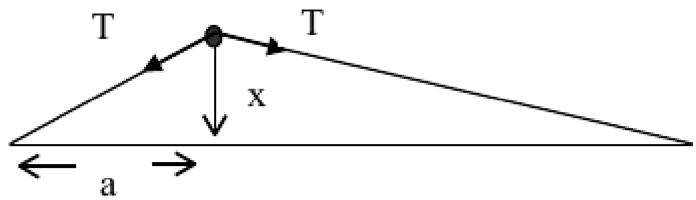
1. Encontrar la posición de equilibrio estático para el sistema masa resorte que pende verticalmente de un soporte fijo. (a) Mostrar que la ecuación de movimiento puede expresarse como: $m\ddot{x} + kx = 0$, donde x es la coordenada de la masa medida desde la posición de equilibrio. (b) Probar que la solución puede expresarse de la forma $x = A\,cos(\omega t) + Bsin(\omega t)$, donde A y B son constantes y $\omega = \sqrt{k/m}$. (c) Mostrar que la solución puede expresarse de la forma $x = Ccos(\omega t + \varphi)$. ¿Cuál es la relación entre las constantes C y φ con las constantes A y B?

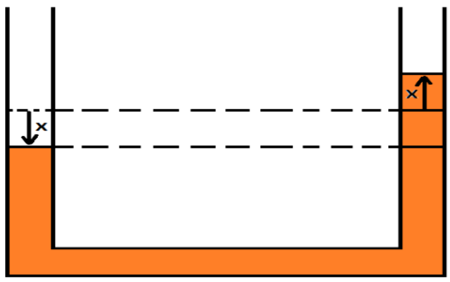
2. Suponga un sistema masa resorte con amortiguamiento siendo la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Discutir las posibles soluciones a la ecuación de movimiento.

3. Un sistema masa-resorte oscila dentro de un fluido que le ejerce una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad $F = bv$. La constante elástica del resorte es $k = 80N/m$ y la masa es de $m = 0{,}2kg$. (a) Escribir la ecuación de movimiento. (b) ¿Qué condición tiene que cumplir la constante b para que el sistema tenga soluciones de la forma $x(t) = A_0 e^{-\gamma t} cos(\omega t + \varphi)$, con $\gamma = b/2m$? (c) Si $\omega = \sqrt{3}\omega_0/2$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ¿cuál es el valor de la constante b?

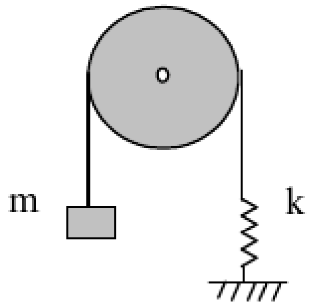
4. Suponga un sistema masa resorte con amortiguamiento. El coeficiente de amortiguamiento es tal que permite soluciones oscilatorias. El sistema es forzado en forma armónica con frecuencia ω (a) Hallar la impedancia mecánica de entrada para el forzante. (b) Hallar la condición de resonancia. (c) Hallar el ancho de banda de la resonancia.

5. Una cuerda de longitud L, la cual está fija en ambos extremos bajo una tensión T, tiene enhebrada una cuenta de masa m a una distancia a de uno de sus extremos. Suponga que a la masa m se le imprime un pequeño desplazamiento transversal, apartando la cuerda de su posición de equilibrio de forma tal que la tensión permanece aproximadamente constante. Para oscilaciones pequeñas encontrar la frecuencia natural de la vibración transversal.

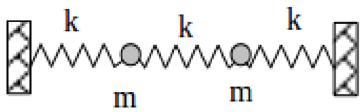




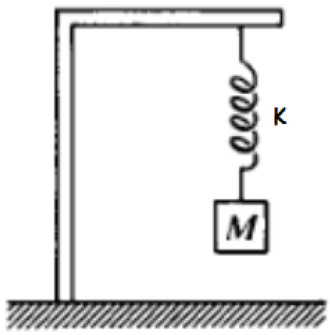
6. Un manómetro tiene sección transversal A. La columna de líquido (que tiene densidad ρ y longitud L) se pone en movimiento. Hallar la frecuencia natural de la oscilación del sistema.



7. La polea de la figura tiene radio R, masa M y puede girar sin fricción alrededor de un eje por su centro. La masa m está unida a un resorte de constante k por una cuerda de masa despreciable pasando por la polea sin deslizamiento. Determinar la frecuencia natural del sistema usando (a) ecuaciones de fuerzas, (b) consideraciones de energía



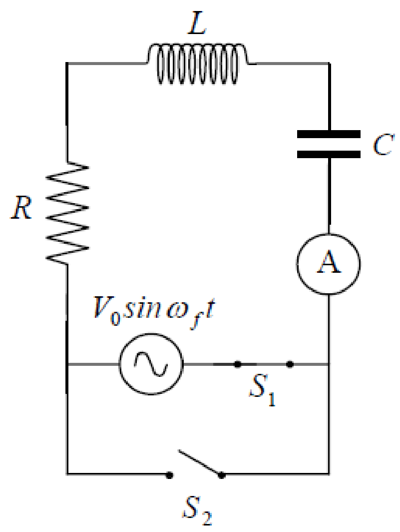
8. Se considera el sistema formado por 2 masas iguales m acopladas por resortes de igual constante elástica k. Hallar los modos normales de vibración horizontal del sistema.



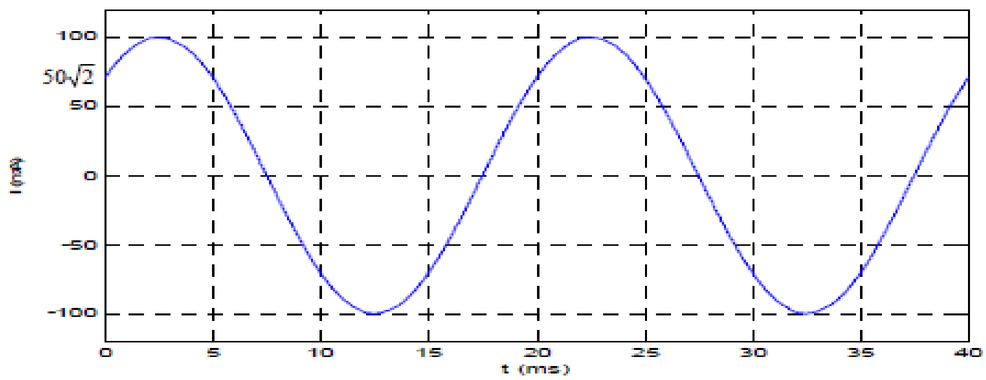
9. Se construye un sismógrafo simple que consiste en una masa M colgando de un resorte en un soporte rígido sujeto a la superficie de la Tierra como se muestra en la figura. (a) Si la función η representa el movimiento de la corteza terrestre, escribir la ecuación de movimiento para la masa suponiendo que existe un amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa. (b) Resolver la ecuación de movimiento suponiendo que $\eta = C\,cos(\omega_T t)$. Graficar la amplitud del movimiento resultante en función de la frecuencia y discutir. (c) ¿Como cambiaría el resultado anterior si no existiera el amortiguamiento? (d) ¿Cuál es el valor del Factor de calidad Q del sistema oscilatorio?

10. Sean las vibraciones representadas por $x_1(t) = A_1\,cos(2\pi\upsilon_1 t)$ y $x_2(t) = A_2\,cos(2\pi\upsilon_2 t)$. Considere la suma de ambas vibraciones $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ (a) ¿Cuál es el periodo de la vibración resultante si $\upsilon_1 = 450Hz$ y $\upsilon_2 = 100Hz$.? (b) ¿Qué sucede si las frecuencias son inconmensurables? (Por ejemplo $\nu_1 = \sqrt{2}\nu_2$). Suponga ahora que las frecuencias ω_1 y ω_2 son muy próximas. (c) Bosqueje el comportamiento de $x(t)$.

11. Sea un punto P del plano cuyo movimiento en coordenadas cartesianas se rige por las siguientes ecuaciones: $x(t) = Acos(\omega_x t + \phi_x)$ e $y(t) = B\,cos(\omega_y t + \phi_y)$. En todos los casos que siguen grafique la trayectoria de P en el sistema x, y. Marque el rectángulo de confinamiento de la trayectoria de P (cuyos lados son tangentes a la trayectoria en cualquier punto de contacto). (a) Si las frecuencias ω_x y ω_y son iguales, dibuje la trayectoria del punto P para $\varphi = 0, \pi/2, \pi$. (b) Repita el punto anterior suponiendo que las frecuencias cumplen $\omega_x = 2\omega_y$. (c) ¿Que sucederá si ω_x y ω_y son inconmensurables?



12. Considérese el circuito RLC que se muestra en la figura. La fuente suministra una tensión variable $V(t) = V_0 sen(\omega_f t)$. Llamamos R al valor de la resistencia, L a la auto inductancia de la bobina, C a la capacidad del condensador y Q a la carga almacenada en el condensador en un instante de tiempo. Así, $I = \frac{dQ}{dt}$ es la intensidad de corriente que circula por el circuito, la diferencia de potencial entre los extremos de la bobina será $L\frac{dI}{dt}$, la diferencia de potencial existente entre las placas del condensador es $\frac{Q}{C}$ y entre los extremos de la resistencia IR. (a) Demuestre, razonando cada uno de los pasos seguidos, que la ecuación diferencial que gobierna el circuito es $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V(t)$. (b) Considérese que al $t = 0$ el circuito se encuentra ya en régimen estacionario. La intensidad de corriente medida en el amperímetro es la que se muestra en la



gráfica. ¿Cuál es la ecuación $Q(t)$ que determina la carga almacenada en el condensador en cualquier instante de tiempo? (c) El coeficiente de auto inducción de la bobina vale $L = \frac{100}{\pi^2}H$. Además, el diseño del circuito es tal que la potencia suministrada por la fuente es máxima. Demuestre que, entonces, la capacidad del condensador vale $1\mu F$. (d) En el instante $t = 47{,}5ms$ se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2. Compruebe que en ese instante de tiempo, la carga almacenada en el condensador es $\frac{1}{\pi}mC$ y que la intensidad que circula por el circuito es cero. En ese momento, el contador de tiempo se pone nuevamente a cero. Si el valor de la resistencia es $R = \frac{16}{\pi}k\Omega$, ¿Cuál es la ecuación $Q(t)$ que gobierna el proceso de descarga?

B. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

1. Hallar los coeficientes de la serie de Fourier correspondientes a las siguientes funciones periódicas:

(a) una señal cuadrada de período T:

$$f(t) = \begin{cases} a \; si \; 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -a \; si \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

(b) Una señal “diente de sierra” de período T

$$f(t) = a\left(1 - \frac{2t}{T}\right); \;\; 0 < t < T$$

(c) Una señal “triangular” de período T:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2a}{T} t \; si \; 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ 2a\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) \; si \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

(d) Para las tres series anteriores, use algún programa de cálculo para graficar la serie utilizando 5, 10 y 15 términos. Compare con la señal original.