1. Divisibilidad

Joaquín Lejtreger

28/04/2021

¡Bienvenidos a los talleres de Teoría de Números! En estos talleres vamos a trabajar principalmente con los **números enteros** que en general denotamos como $\mathbb{Z}$. Pueden pensar que este conjunto de números es simple, pero la verdad es que hay mucho para decir sobre ellos. Empezamos hablando de la división entera.

Teorema de la división entera: Dados a y b enteros existen únicos q y r enteros tale que $b > r \geq 0$ y además

$$a = bq + r$$

Al número q lo llamamos *cociente* y al número r lo llamamos *resto*. El proceso de obtener estos dos números es lo que conocemos por *división entera*.

Decimos que b **divide a** a si el resto de dividir a entre b es 0 ($r = 0$). Cuando esto ocurre, escribimos $b \mid a$. También podemos decir que b **es un divisor** de a

Ejemplos:

- $3 \mid 6$
- $4 \mid 12$
- $6 \nmid 3$

¡Esta es lo único que necesitamos para resolver los problemas del taller! Pero no se dejen engañar, este concepto esconde muchos problemas interesantes.

1. Primera vuelta

1. Mostrar que si $b \mid a$ entonces $-b \mid a$.
2. Mostrar que si $b \mid a$ y $b \mid c$ entonces $b \mid a + c$.
3. Mostrar que si $b \mid a$ entonces $b \mid na$ para todo n entero.
4. ¿Es cierto que si $b \mid a$ y $c \mid a$ entonces $ab \mid c$?
5. ¿Cuántos múltiplos de 6 hay entre 1 y 5000?
6. Sabiendo que el resto de dividir a entre 18 es 4, hallar el resto de dividir $a^2 + 3a + 1$ entre 18.
7. Probar que si un número termina en un dígito par entonces es par.
8. Calcular todas las parejas de número enteros a, b tales que $ab = a + b$
9. Se efectúa el producto de todos los números impares que no son múltiplos de 5 y que están comprendidos entre el 1 y el 1994. ¿Cuál es la cifra de las unidades del resultado?
10. Probar que si elegimos 101 números del 1 al 200, entonces existen dos números a y b tales que $a|b$.

11. Se eligen 128 potencias de 2 distintas, probar que existen dos cuya diferencia es múltiplo de 1000.

12. Dado un entero $n \geq 0$, demostrar que existe un conjunto S de n números enteros tales que $(a-b)^2$ divide a ab, para cualesquiera a, b en S.

2. Segunda vuelta

Para los que ya trabajaron con el concepto de divisibilidad, podemos hablar del *máximo común divisor.*

Máximo común divisor: dados dos números enteros a y b, decimos que el máximo común divisor entre ellos es el número más grande que divide a los dos. Es decir, el máximo c tal que $c \mid a$ y $c \mid b$. A dicho c lo escribimos $mcd(a, b)$

1. Probar que $mcd(na, nb) = n.mcd(a, b)$

2. Demostrar que la fracción $\frac{21n+4}{14n+3}$ está simplificada para todo n.

3. La **sucesión de Fibonacci** se obtiene de la siguiente manera: defimos el primer término como 0, el segundo como 1 y apartir de ahí el siguiente se obtiene sumando los dos anteriores. Matemáticamente: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Hallar, para cada $n > 1$, $mcd(f_n, f_{n+1})$.

4. Los números en la secuencia $101, 104, 109, \ldots$ son todos de la forma $a_n = 100 + n^2$. Definimos $d_n = mcd(a_n, a_{n+1})$. Hallar el n que maximiza d_n.

5. Probar que, dados $a, n, m > 1$ se cumple que $mcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{mcd(m,n)} - 1$

6. ¿Para qué números naturales a, b se cumple que $2^b - 1 \mid 2^a + 1$?