Matemática Discreta

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraído y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Índice general

1. Conjuntos, relaciones, funciones **3**
1.1. Conjuntos 3
1.1.1. Primeras definiciones 3
1.1.2. Unión de conjuntos 4
1.1.3. Intersección y resta de conjuntos 5
1.1.4. Producto cartesiano 6
1.1.5. Conjunto de partes 8
1.2. Funciones 8
1.2.1. Conjunto de imágenes y preimágenes 9
1.2.2. Inyectividad y sobreyectividad 9
1.2.3. Composición y función inversa 10
1.3. Relaciones 12
1.3.1. Relación opuesta y composición de relaciones 12
1.3.2. Relaciones de equivalencia 13
1.3.3. Particiones 15
1.3.4. Relaciones de orden 16
1.3.5. Números racionales 18
1.3.6. Matriz asociada a una relación 19

2. Cardinalidad y combinatoria **21**
2.1. Cardinalidad 21
2.1.1. Finitud 22
2.1.2. Numerabilidad 23
2.2. Principios básicos de conteo 27

2.2.1. Principio de la suma . . . 28
2.2.2. Principio del producto . . . 29
2.2.3. Principio de Inclusión-Exclusión . . . 31
2.2.4. Permutaciones . . . 33
2.2.5. Arreglos . . . 35
2.2.6. Arreglos con repetición . . . 36
2.2.7. Cantidad de relaciones . . . 36
2.2.8. Combinaciones . . . 37
2.2.9. Teorema del binomio . . . 39
2.2.10. Combinaciones con repetición . . . 41
2.2.11. Otras cantidades interesantes . . . 42
2.2.12. Permutaciones con repetición . . . 42
2.2.13. Desórdenes . . . 44
2.2.14. Desórdenes . . . 44
2.2.15. Cantidad de funciones sobreyectivas . . . 44
2.2.16. Número de Stirling de segunda especie . . . 45

3. Grafos **46**
3.1. Generalidades . . . 46
3.1.1. Primeras definiciones y ejemplos . . . 48
3.1.2. Isomorfismos de grafos . . . 49
3.1.3. Subgrafos . . . 52
3.1.4. Multigrafos . . . 53
3.1.5. Caminatas en grafos . . . 55
3.1.6. Conexión . . . 56
3.1.7. Distancia . . . 58
3.2. Recorridos y circuitos Eulerianos . . . 59
3.2.1. Caminos y ciclos Hamiltonianos . . . 62
3.3. Planaridad . . . 65
3.3.1. Característica de Euler . . . 66
3.3.2. Grafos no planos . . . 68

Capítulo 1

Conjuntos, relaciones, funciones

1.1. Conjuntos

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) a partir de las cuales se prueban todos los teoremas. En esta parte del curso trabajaremos de manera un poco informal y no especificaremos los axiomas de la teoría. Así por ejemplo mostraremos construcciones de ciertos conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría.

1.1.1. Primeras definiciones

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos que poseen una propiedad en común. A estos objetos los llamaremos **elementos**. Escribiremos $x \in X$ para indicar que x pertenece a X.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si A y B tienen los mismos elementos. Esto nos dice que en principio para definir un conjunto debemos decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto enumerándolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad determinada. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión**.

Ejemplos 1.1.1. Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto A está **contenido** o **incluido** en otro conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B. También podemos decir en este caso que A es un **subconjunto** de B o que B **contiene** a A y lo escribimos $A \subseteq B$. Observar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implica que $A = B$. Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

También escribiremos $A \not\subseteq B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está incluido en B pero estos conjuntos no son iguales. El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es el conjunto que no tiene elementos. Observar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subseteq X$.

1.1.2. Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto C contiene a A y a B, entonces $A \cup B \subseteq C$.

Proposición 1.1.2. *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demostración. Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.
De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3). $\square$

La Proposición 1.1.2 permite dar una definición para la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$. Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} := \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos $C = \{A_1, \dots, A_n\}$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C}.$$

Si $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos, una notación usual para $\bigcup \mathcal{A}$ es

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ejemplo 1.1.3. Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos, luego

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

(el conjunto que contiene a todos los números naturales excepto el 1).

1.1.3. Intersección y resta de conjuntos

Si A y B son conjuntos, definimos:

- su **intersección**: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$,
- y su **resta**: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$; sin embargo, la resta no lo es.

Ejemplo 1.1.4. Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, \cdots\}$$

(el conjunto de los pares que no son múltiplos de 3)

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección se define por

$$\bigcap \mathcal{C} := \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos A_p como en el Ejemplo 1.1.3, tenemos

$$\bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Si $A \subseteq X$, entonces definimos el **complemento** de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$. Observar que en la notación A^c no se explicita el conjunto X. Cuando se habla de complemento, el conjunto X se piensa como el *universo* en el que están contenidos los conjuntos y se deduce del contexto. Si esto no es así, entonces es mejor mantener la notación $X \setminus A$ que explicita el conjunto X.

Ejercicio 1.1.5. Probar, para A, B subconjuntos de X:

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$ (en ambos casos el *universo* implícito es X).

1.1.4. Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\},$$

donde (a,b) es el par ordenado de los elementos a y b. Observar que, al tratarse de pares ordenados, el producto cartesiano no es conmutativo.

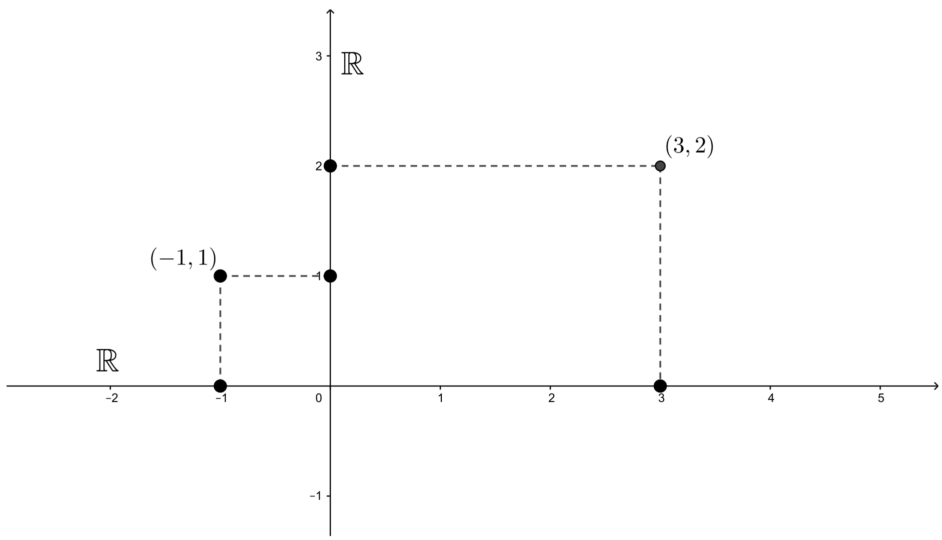
Ejemplos 1.1.6. 1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{6,7,8\}$, entonces

   $$A \times B = \{(1,6),(1,7),(1,8),(2,6),(2,7),(2,8)\}.$$

   . Determinar $B \times A$.

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.



Definimos la **unión disjunta** de dos conjuntos A y B por

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

De esta forma A se identifica con el subconjunto $A \times \{0\}$ y B con el subconjunto $B \times \{1\}$.

Ejemplos 1.1.7. 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, entonces

$$A \sqcup B = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}.$$

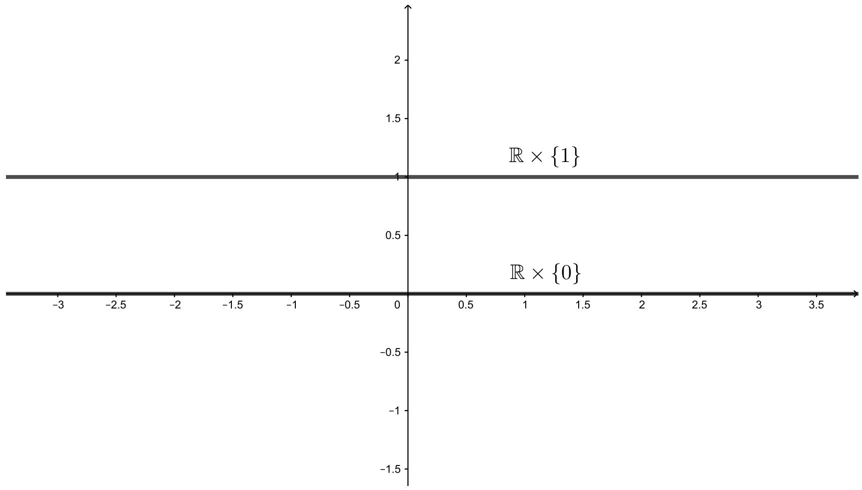
Este puede verse como el conjunto $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Definimos el **conjunto de los números enteros** por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Identificamos aquí el conjunto de los naturales con los elementos de la forma (n,1), y los números negativos con los pares de la forma $(n, 0)$. Usualmente se nota $n = (n, 1)$ y $-n = (n, 0)$.

3. La unión disjunta de la recta real con sí misma puede verse como la unión de dos rectas paralelas en el plano:



1.1.5. Conjunto de partes

El **conjunto de partes** o **conjunto potencia** de un conjunto A es

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplos 1.1.8. 1. El conjunto de partes de $A = \{1, 2\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

2. El conjunto de partes del conjunto vacío es

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

1.2. Funciones

Fijemos dos conjuntos A y B.
Se llama **relación** de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una **función** de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que cumple que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** de f al conjunto B.

Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A en B, y notamos B^A al conjunto de todas las funciones de A en B.

Ejemplos 1.2.1. 1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía.

2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en X por

$$id_X : X \to X,\ id_X(x) = x \ \ \forall x \in X.$$

3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por

$$i : A \to B,\ i(a) = a \forall \ \ a \in A.$$

   Si $A = B$, entonces i no es otra cosa que la identidad.

4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es

$$f : A \to B,\ f(a) = b_0 \ \ \forall a \in A.$$

5. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, llamamos **restricción de** f al subconjunto A, a la función $f_{|A} : A \to Y$ definida por $f_{|A}(x) = f(x)$.

1.2.1. Conjunto de imágenes y preimágenes

Tomemos $f : A \to B$ una función. Si $f(a) = b$ decimos que b es la **imagen** de a por f y que a es una **preimagen** de b por f. Además, si $X \subseteq A, Y \subseteq B$, decimos que

- el conjunto **imagen** de X por f es $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset B$.
- el conjunto **preimagen** de Y por f es $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$.

También diremos que la **imagen** o el **recorrido** de la función f es el conjunto $f(X)$.

Ejercicio 1.2.2. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

1.2.2. Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x')$ se da sólo si $x = x'$.

Ejemplos 1.2.3. 1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.

2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.

3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.

4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva pues $f(-1) = f(1)$.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplos 1.2.4. 1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio 1.2.5. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y sólo si f es inyectiva.

2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

1.2.3. Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su **composición** es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

Proposición 1.2.6. *1. La composición de funciones es asociativa.*

2. La composición de funciones no es conmutativa.

3. Dada $f : A \to B$, se tiene $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$.

Demostración. Se hizo en clase y queda como ejercicio para el lector (ver Ejercicio 5 del Repartido 2). □

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to X$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**.

Proposición 1.2.7. *Si una función f tiene inversa, entonces esta es única y se nota f^{-1}.*

Demostración. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

□

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones biyectivas. Antes de demostrarla, presentamos un resultado previo e importante.

Lema 1.2.8. *Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones.*

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*

Demostración.

1. Supongamos que a, a' son elementos de A tales que $f(a) = f(a')$. Queremos ver que $a = a'$.
   Aplicando g a la igualdad de arriba, se tiene
   $$g(f(a)) = g(f(a')),$$
   que equivale a $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. hora bien, como $g \circ f$ es inyectiva, se deduce $a = a'$.
2. Sea $A \in A$, buscamos $b \in A$ tal que $g(b) = a$. Como $g \circ f : A \to A$ es sobreyectiva, existe $a' \in A$ tal que $(g \circ f)(a') = a$. Entonces $g(f(a')) = a$ y obtenemos que $f(a')$ es un elemento como el b que buscábamos.

□

Proposición 1.2.9. *Una función es invertible si y sólo si es biyectiva.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva. Como $g \circ f = id_A$ y id_A es inyectiva, se deduce de la primera parte del Lema anterior, que f es inyectiva.
Por otra parte, como $f \circ g = id_B$ y id_B es sobreyectiva, se deduce de la segunda parte del Lema anterior, que f es sobreyectiva.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f. □

1.3. Relaciones

Como se vio en la sección anterior, una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Allí estudiamos una clase especial de relaciones: las funciones. En este capítulo trataremos otras dos clases de relaciones que tienen la particularidad de estar contenidas en productos de la forma $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ de esta forma será llamada simplemente **relación en** X y escribiremos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diremos también que $\mathcal{R}$ es

- **reflexiva** si $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- **simétrica** si para todos $x, y \in X$ $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$.
- **asimétrica** si para todos $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ implica que no se cumple $y\mathcal{R}x$.
- **antisimétrica** si para todos $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica $x = y$.
- **transitiva** si para todos $x, y, x \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones

- $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = X \times X$.

Observamos que sólo $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4$ son reflexivas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_4$ son simétricas, todas salvo $\mathcal{R}_4$ son antisimétricas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ son asimétricas y que todas salvo $\mathcal{R}_3$ son transitivas.

1.3.1. Relación opuesta y composición de relaciones

Dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B, su **relación opuesta** es la relación $\mathcal{R}^{op}$ de B en A, definida por

$$\mathcal{R}^{op} := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}.$$

Observación 1.3.2. Si $f : A \to B$ es función, f es invertible si y sólo si su relación opuesta $f^{op} \subseteq B \times A$ es una función.

Dadas dos relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times B, \mathcal{S} \subseteq B \times C$, se define la composición $S \circ R$ como sigue:

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid existeb \in B \text{ tal que } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Observación 1.3.3. 1. Una relación en S es

- reflexiva si y sólo si $Id_A \subseteq R$,
- simétrica si y sólo si $R^{op} = R$,
- asimétrica si y sólo si $R \cap R^{op} = \emptyset$,
- antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{op} \subseteq Id_X$,
- transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

2. Toda relación asimétrica es antisimétrica, pero el recíproco no es cierto.

1.3.2. Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Generalmente se usará para las relaciones de equivalencia la notación: $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$ o $\asymp$.

Ejemplo 1.3.4 (Congruencia módulo n)**.** Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$, definida por

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } n.$$

Aquí la noción de *múltiplo* puede definirse de la misma forma que para los números naturales a partir de la división entera. Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $a - a = 0$ es múltiplo de n para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que $a \equiv_n a$ para todo a.

- Es simétrica: si $a \equiv_n b$, entonces $a - b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b - a = -kn$, lo que quiere decir que $b \equiv_n a$.

- Supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Esto implica que existen k y h tales que $a - b = kn$ y $b - c = hn$, luego

  $$a - c = a - b + b - c = kn + hn = (k + h)n.$$

  Por lo tanto $a \equiv_n c$.

Clases de equivalencia y conjunto cociente

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X, definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$ como el subconjunto de todos los elementos de X que se relacionan con x, es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subset X.$$

Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 (Ejemplo 1.3.4) podemos mirar la clase del cero:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n - 0 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este es el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. En este caso la clase del 0 para la congruencia módulo n es siempre el conjunto de los múltiplos de n. Observemos que en general la transitividad de la relación de equivalencia implica que si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$.
Definimos el **conjunto cociente** de una relación $\sim$ en X como el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Volvamos al ejemplo de la congruencia módulo 3. Para hallar el cociente de esta relación debemos determinar cuáles son todas sus clases de equivalencia. Ya sabemos que la clase del cero es el conjunto de todos los múltiplos de 3. Observamos que además

- $[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, y
- $[2] = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$

son otras dos clases diferentes. Se tiene además que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces al dividir n entre 3 obtenermos $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$. Luego n está en alguna de las clases anteriormente mencionadas. En conclusión

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Ejercicio 1.3.5. Probar que en general el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene n elementos.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X definimos la **proyección al cociente** como la función

$$\pi : X \to X/\sim, \ \pi(x) = [x].$$

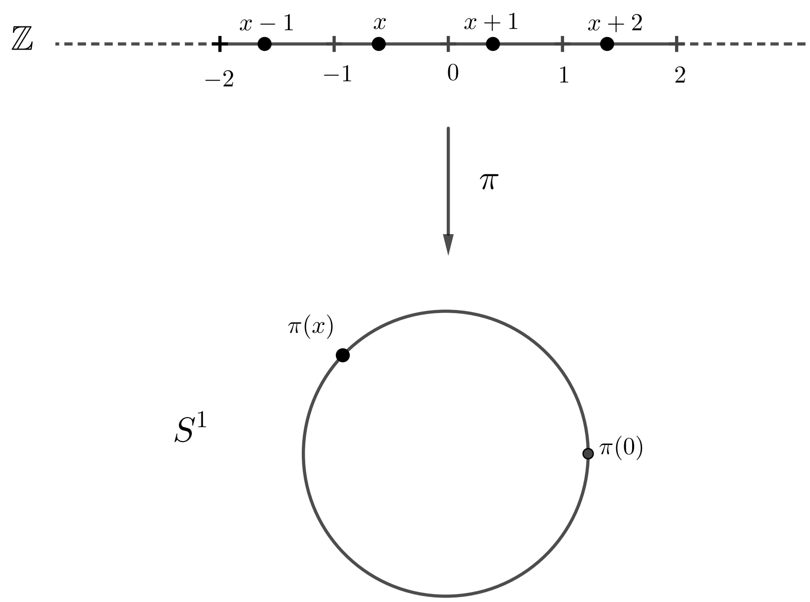
Ejemplo 1.3.6. Ponemos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Se deja como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. El conjunto cociente de esta relación puede verse geométricamente como el círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Observar que de esta forma la proyección queda $\pi : \mathbb{Z} \to S^1,\ \pi(x) = e^{2\pi i x}$.



1.3.3. Particiones

Una **partición** de un conjunto X es una familia P de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

1. Cada elemento de P es no vacío.
2. Dos elementos diferentes de P son disjuntos (se dice también que los elementos de P son disjuntos dos a dos).
3. La unión de los elementos de P es todo X, es decir $\bigcup P = X$.

Ejemplos 1.3.7. 1. Si X es cualquier conjunto, entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es una partición de X; también lo es X. Diremos que estas son las particiones **triviales** de X.

2. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego si ponemos

$$A = \{1\},\ B = \{2, 5\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ y } D = \{1, 6\},$$

tenemos por ejemplo que $P_1 = \{A, B, C\}$ es una partición pero $P_2 = \{B, D\}$ y $P_3 = \{B, C, D\}$ no lo son.

El siguiente resultado muestra que las relaciones de equivalencia en X y las particiones de X son en definitiva puntos de vista distintos para un mismo concepto.

Proposición 1.3.8. *1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, entonces el cociente $X/\sim$ es una partición en X.*

2. Sea P una partición en un conjunto X. Entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ en X tal que $X/\sim = P$.

Demostración. Para probar la primera parte debemos ver primero que las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son disjuntas dos a dos. Supongamos entonces que tenemos dos clases diferentes $[x]$ e $[y]$ que no son disjuntas. Esto quiere decir que existe z en la intersección de ambas, o dicho de otro modo $z \sim x$ y $y \sim z$. La transitividad de $\sim$ implica que $x \sim y$ y luego $[x] = [y]$. Por otro lado es claro que todo elemento $x \in X$ pertenece a una clase de equivalencia, luego la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto X.
Para la segunda parte alcanza con definir $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para probar la unicidad, supongamos que $\sim$ y $\equiv$ son dos relaciones de equivalencia tal que $X/\sim\ = X/\equiv\ = P$. Probemos que $x \sim y$ si y sólo si $x \equiv y$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \sim \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \equiv \\ &\Leftrightarrow x \equiv y. \end{aligned}$$

□

1.3.4. Relaciones de orden

Sea X un conjunto. Una **relación de orden** en X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en X. Generalmente usaremos para las relaciones de orden notaciones del estilo $\leq$ o $\preceq$.
Una **relación de orden estricto** en X es una relación asimétrica y transitiva en X. Para las relaciones de orden estrito usamos generalmente la notación: $<$ o $\prec$.

Proposición 1.3.9. *Si $\leq$ es una relación de orden amplio en X, entonces la relación $<$ definida por*

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ y } x \neq y, \quad \forall x \in X$$

es una relación de orden estricto.
Por otro lado, si $<$ es una relación de orden estricto, entonces la relación definida por

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ o } x = y$$

es una relación de orden amplio.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Un **conjunto ordenado** es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden en X. Observar que si $A \subset X$, entonces la relación $\leq$ define una relación de orden en A. Puede entonces considerarse el conjunto ordenado $(A, \leq)$ (abusamos aquí del lenguaje, usando la misma notación para $\leq$ y para $\leq \cap (A \times A)$).

Diremos que X es un **conjunto totalmente ordenado** si se cumple que dado un par de elementos $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Es decir que todos los elementos son comparables. También se dice que $\leq$ es un **orden total** en X.
Una **cadena** en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subset X$ que está totalmente ordenado.

Ejemplos 1.3.10.

1. Recordando la definición de números enteros dada en el último ejercicio del Repartido 3, observar que el orden usual en este conjunto queda definido por:

    - $[(n,0)] \leq [(m,0)]$ si $m \leq n$,
    - $[(n,1)] \leq [(m,1)]$ si $n \leq m$, y
    - $[(n,0)] \leq [(m,1)]$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.

    Este es un orden total.

2. Dado un conjunto cualquiera X, ponemos en el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ el orden $A \leq B$ si y solo si $A \subset B$. Este no es un orden total, salvo que X sea un conjunto unitario.

Fijemos ahora $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que

- $m \in X$ es un elemento **minimal** si $x \leq m$ implica $x = m$.
- $M \in X$ es un elemento **maximal** si $M \leq x$ implica $x = m$.

- $m \in X$ es un **mínimo** si $m \leq x$ para todo $x \in X$.
- $M \in X$ es un **máximo** si $x \leq M$ para todo $x \in X$.

Observar que si $(X, \leq)$ tiene un máximo, entonces este es único (lo mismo para mínimo).

1.3.5. Números racionales

Consideremos en el conjunto $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ (con $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos) la relación dada por

$$(n, m) \sim (k, r) \Leftrightarrow nr = mk.$$

Veamos primero que es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $(n, m) \sim (n, m)$ porque claramente $nm = nm$.
- Es simétrica: si $(n, m) \sim (k, r)$, entonces $nr = mk$. Esto implica que $mk = nr$ y luego $(k, r) \sim (n, m)$.
- Supongamos que $(n, m) \sim (k, r)$ y $(k, r) \sim (\ell, h)$, es decir, $nr = mk$ y $kh = r\ell$. Luego multiplicando la primera igualdad por h se tiene

  $$nrh = mkh = mr\ell.$$

  Como $r \neq 0$, la igualdad anterior implica $nh = m\ell$, lo que significa que $(n, m) \sim (\ell, h)$.

Adoptaremos la notación $\frac{n}{m}$ para referirnos a la clase de (n, m) y escribimos $\mathbb{Q} := X/\sim$. Este cociente es el conjunto de los **números racionales**. A partir de esta construcción podemos observar que los números enteros pueden verse como un subconjunto de los números racionales. Más precisamente lo hacemos mediante la función inyectiva

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \; i(n) = \frac{n}{1}.$$

Definimos las operaciones suma y producto en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{r} = \frac{nr + km}{mr}; \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{r} = \frac{nk}{mr}.$$

Se deja como ejercicio probar que estas operaciones están bien definidas, es decir que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $\frac{k}{r} = \frac{k'}{r'}$, entonces

$$\frac{nr + km}{mr} = \frac{n'r' + k'm'}{m'r'} \text{ y } \frac{nk}{mr} = \frac{n'k'}{m'r'}.$$

Observar que las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ extienden a las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$i(n) + i(m) = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} = i(n+m)$$

y

$$i(n) \cdot i(m) = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = i(nm).$$

La relación de orden usual en los números racionales es definida de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} \leq \frac{k}{r} \Leftrightarrow nr \leq_{\mathbb{Z}} km,$$

donde se eligen representantes tales que m, r positivos, y el símbolo $\leq_{\mathbb{Z}}$ indica el orden usual en los enteros. Queda para el lector observar que la relación está bien definida y que $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

1.3.6. Matriz asociada a una relación

Supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ y que $\mathcal{R}$ es una relación de X en Y. La **matriz asociada** a $\mathcal{R}$ es una matriz de n columnas y m filas (a_{ij}) tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \mathcal{R} y_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tener en cuenta que la definición de matriz asociada depende de cómo ordenamos los elementos de los conjuntos X e Y, por lo que hay los datos necesarios para determinarla son: los conjuntos finitos, la relación y un orden total en cada conjunto.

Ejemplo 1.3.11. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3\}$ y la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), , (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}.$$

Su matriz asociada nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observar que dada una matriz de $n \times m$ y conjuntos X, Y con n, m elementos respectivamente, dispuestos en cierto orden, existe una única relación cuya matriz asociada es la dada.

Matriz asociada a la composición de dos relaciones Para facilitar el enunciado del resultado que sigue, precisamos una definición auxiliar. Dada una matriz de coeficientes naturales A, notamos $\hat{A}$ a la matriz que se obtiene cambiando de A, sustituyendo los naturales estricamente positivos por 1.

Proposición 1.3.12. *Sean* $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ *de* X *en* Y *y de* Y *en* Z *respectivamente.*
Consideremos órdenes totales en X, Y, Z*. Notemos* A, B *a las matrices asociadas a* $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ *respectivamente.*
La matriz asociada a $S \circ R$*, con los mismos órdenes considerados anteriormente, es la matriz* $\hat{AB}$*.*

Demostración. La veremos en clase. $\square$

Más adelante nos interesará contar el número de relaciones que cumplan con determinadas propiedades. En ese caso la representación matricial de las relaciones nos será útil.

Capítulo 2

Cardinalidad y combinatoria

2.1. Cardinalidad

Nos enfocamos aquí en un par de preguntas:

- ¿Qué es contar?
- ¿Qué significa que un conjunto tenga n elementos?

Para ilustrar esto, antes de verlo formalmente, consideremos el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Lo que se hace al contar este conjunto es señalar cada elemento y decir en orden los números naturales a partir del 1, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccc} \{a, & b, & c, & d, & e\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Cuando ya no quedan elementos que etiquetar, se toma el último natural usado y se declara: "El conjunto tiene 5 elementos".

Mirando la figura, podemos observar que allí se establece una función entre el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vemos además que esta función es biyectiva.

Podría pasar que dado un conjunto X no fuera posible llevar a cabo este proceso de manera de agotar todos sus elementos. En ese caso estamos en presencia de lo que llamamos un conjunto infinito.

2.1.1. Finitud

Diremos que un conjunto X es **finito** si es vacío o bien existe una función biyectiva

$$f : \{1, \dots, n\} \to X$$

para algún número natural $n \in \mathbb{N}^*$. Si X no es finito diremos que es **infinito**.

El siguiente es un resultado clásico de combinatoria:

Teorema 2.1.1 (Principio del Palomar)**.** *Consideremos un número natural cualquiera n. Luego no existe ninguna función de $\{1, \dots, n+1\}$ en $\{1, \dots, n\}$ que sea inyectiva.*

Demostración. Vamos a probar el principio del palomar por inducción.

Si $n = 1$, entonces la una única función $f : \{1, 2\} \to \{1\}$ está dada por $f(1) = f(2) = 1$. Es claro que f no es inyectiva.
Supongamos que no existe ninguna función inyectiva de $\{1, \dots, n+1\}$ a $\{1, \dots, n\}$ y que tenemos una función inyectiva $f : \{1, \dots, n+2\} \to \{1, \dots, n+1\}$.
Distinguimos dos casos

- Si $n+1 \notin f(\{1, \dots, n+1\})$, entonces podemos definir g como la restricción de f al conjunto $\{1, \dots, n+1\}$.
- En el otro caso se tiene un (único) $a \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ tal que $f(a) = n+1$. Tomemos $b = f(n+1)$, definimos g de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

En ambos casos, la función g construida es inyectiva, lo que nos lleva a una contradicción.
Por inducción tenemos la tesis del teorema. □

El nombre *Principio del Palomar* se debe a su formulación más popular: No pueden meterse $n+1$ palomas en n jaulas sin que dos palomas compartan una jaula.

Corolario 2.1.2. *1. Consideremos números naturales n, m tales que $n < m$. Luego no existe ninguna función de $\{1, \dots, m\}$ en $\{1, \dots, n\}$ que sea inyectiva.*

2. $\mathbb{N}$ *es infinito.*

Demostración. 1. Si $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ es inyectiva y $m > n$, podemos restringir f al conjunto $\{1, \dots, n+1\}$ y la restricción sería también inyectiva, contradiciendo el principio del palomar.

2. Si $\mathbb{N}$ fuera finito, para cierto n, existiría una función $f : \mathbb{N} \to \{1, 2, \cdots, n\}$. Restringiendo f a $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, obtenemos una función inyectiva que contradice el Principio del Palomar.

$\square$

Proposición 2.1.3. *Sea* $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ *una función.*

- *Si* f *es inyectiva, entonces* $n \leq m$.
- *Si* f *es sobreyectiva, entonces* $n \geq m$.
- *Si* f *es biyectiva, entonces* $n = m$.

Demostración. La primera parte es el contrarrecíproco del Corolario a). Por otra parte, si f es sobreyectiva, por un ejercicio del práctico, sabemos que tiene una inversa a izquierda, y que ésta es inyectiva y tiene por dominio $\{1, 2, \cdots, m\}$ y por codominio $\{1, 2, \cdots, n\}$. Deducimos de lo anterior que $m \leq n$.
Finalmente, si f es biyectiva, su inversa es inyectiva, y por tanto se tiene $n \leq m \leq n$, de donde $n = m$.

$\square$

El corolario anterior y el hecho de que la composición de funciones biyectivas es biyectiva habilitan la siguiente definición:

Definición 2.1.4. Sea X un conjunto finito. Si es vacío, decimos que 0 es el **cardinal** de X. En caso contrario, decimos que n es el **cardinal** de X si existe una función biyectiva $f : \{1, \dots, n\} \to X$. Escribimos $\#X = n$.

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Notaremos en este caso $X \simeq Y$. A partir de esto uno puede decir que X tiene cardinal n si $X \simeq \{1, \dots, n\}$.

2.1.2. Numerabilidad

Ya observamos que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. Nos preguntamos a partir de esto qué otros conjuntos infinitos existen y si todos ellos son equipotentes a $\mathbb{N}$, o si por el contrario hay conjuntos infinitos "más grandes" que otros.

Definición 2.1.5. Diremos que un conjunto X es **numerable** si es finito o es equipotente con $\mathbb{N}$.

Es claro que $\mathbb{N}$ es numerable infinito, veamos qué otros conjuntos numerables infinitos podemos construir.

Proposición 2.1.6. *Si $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces A es numerable.*

Demostración. Para probar esto, podemos suponer que A es infinito (en el otro caso no hay nada que probar) y considerar la función $f : \mathbb{N} \to A$ definida por recurrencia de la siguiente forma:

- $f(0) = \text{mín}\, A$, y
- $f(n) = \text{mín}(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\})$.

Observar que como supusimos que este conjunto es infinito el paso recursivo siempre puede hacerse. Luego f queda bien definida.
Es claro que f es inyectiva. Por otro lado, si no fuera sobreyectiva, tomemos $n_0 = \text{mín}(A \setminus Im(f))$. Se tiene $n_0 - 1 = f(k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, de donde $f(k+1) = n_0$ por definición de f. Se deduce, a partir de la biyección f, que A es equipotente con $\mathbb{N}$. □

Ejemplo 2.1.7. Veamos que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para esto basta con considerar la función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La siguiente proposición permite construir más ejemplos. Además, la propiedad (i) dice que todo conjunto infinito contiene una copia de $\mathbb{N}$, es decir que de alguna manera el infinito numerable es el infinito "más chico".

Proposición 2.1.8. *Sea X un conjunto.*

(i) Si X es infinito, entonces existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

(ii) Si existe $f : X \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces X es numerable.

(iii) Si existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva, entonces X es numerable

Demostración. (i) Definimos $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva como sigue

$$f(0) = x, \text{ para cierto } x \in X, f(n+1) \in X - \{f(0), f(1), \cdots, f(n).$$

El hecho de que X sea infinito nos asegura que $X \neq \emptyset$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X - \{f(0), f(1), \cdots, f(n)\} \neq \emptyset$, por lo que la función está bien definida. Es claro que es inyectiva.

(ii) Como f es inyectiva tenemos que $X \simeq f(X)$. Por otro lado $f(X)$ está contenido en $\mathbb{N}$, por lo que es numerable. Luego X también lo es.

(iii) Como f es sobreyectiva, tiene una inversa a derecha que es inyectiva. Por la parte anterior, queda X numerable.

□

Proposición 2.1.9. *Si A y B son numerables, entonces $A \times B$ también lo es.*

Demostración. Observar que si A y B son infinitos, entonces $A \times B$ es equipotente con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probaremos entonces que existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

La inyectividad de esta función está dada por la unicidad de la descomposición en factores primos.
Se deja como ejercicio probar los otros casos (A y/o B finitos). □

De lo anterior puede concluirse que el producto cartesiano de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.
Como consecuencia de la Proposición 2.1.9 tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.10. Veamos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. Para esto primero observamos que $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es numerable por la proposición anterior. Luego como la proyección al cociente $\pi : X \to \mathbb{Q}$ es sobreyectiva, podemos utilizar el punto (iii) la Poposición 2.1.2 para concluir que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Tenemos entonces que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$, que son conjuntos que contienen estrictamente a $\mathbb{N}$, son numerables. Sin embargo existe una diferencia esencial entre estos conjuntos y $\mathbb{R}$, como vemos a continuación.

Proposición 2.1.11. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable.*

Demostración. La prueba que presentamos utiliza una idea conocida como *argumento diagonal de Cantor.*
Si $\mathbb{R}$ fuera numerable, sus subconjuntos también lo serían. Vamos a probar entonces que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es numerable.
Definimos $S \subset [0, 1)$ como el conjunto de números reales cuya expresión decimal sólo utilice ceros y unos. Vamos a ver que no existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to S$.
Sea $f : \mathbb{N} \to S$ función. Tomemos $x \in S$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, en el lugar k después de la coma tenga una cifra (0 o 1) diferente al lugar k después de la coma de $f(k)$. Podemos observar que este x no está en la imagen de f porque para cualquier $k \in \mathbb{N}$

el lugar k después de la coma de x difiere del lugar k después de la coma de $f(k)$. Un ejemplo de lo anterior puede verse a continuación:

$$\begin{aligned} f(1) =& 0,01100010100111\dots \\ f(2) =& 0,01001110010101\dots \\ f(3) =& 0,10100010010101\dots \\ f(4) =& 0,00011101010100\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aquí tenemos que el primer lugar después de la coma de $f(1)$ es 0, el segundo lugar después de la coma de $f(2)$ es 1, el tercer lugar despuués de la coma de $f(3)$ es 1, etc. Luego $x = 0,1000\dots$ no está en la imagen de f. $\square$

Tenemos entonces conjuntos infinitos de "diferentes cardinales"! ($\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ por ejemplo). Podríamos decir que desde el punto de vista de su cardinal, $\mathbb{R}$ es estrictamente más grande que $\mathbb{N}$. A partir de aquí aparecen de forma natural dos preguntas:

- ¿Existe algun conjunto infinito cuyo cardinal esté entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$? Esto podría precisarse de la siguiente forma: ¿Existe un conjunto A que no es equipotente a $\mathbb{N}$ ni a $\mathbb{R}$ y funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : A \to \mathbb{R}$?
- ¿Existen conjuntos infinitos más grandes que $\mathbb{R}$? Es decir: ¿$\mathbb{R}$ se puede inyectar en un conjunto X que no sea equipotente a este?

La teoría de conjuntos no permite responder a la primera pregunta. Esto quiere decir que no puede demostrarse que es cierta ni que es falsa a partir de los axiomas. La segunda pregunta es respondida por el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12 (Cantor)**.** *Dada un conjunto X, no existe ninguna función sobreyectiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$.*
(Se deduce que $\mathcal{P}(X)$ no es equipotente con X).

Demostración. Supongamos que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es sobreyectiva. Definimos

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Como f es sobreyectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Nos preguntamos entonces si a pertenece o no a A. Estudiamos las dos opciones:

- Si $a \in A$, entonces por la definición de A se tiene que $a \notin f(a) = A$, lo que es absurdo.
- Si $a \notin A$, entonces $a \notin f(a)$ y por lo tanto $a \in A$, que también es absurdo.

Concluimos entonces que no puede existir dicha función f.

$\square$

Por otra parte, el Teorema de Cantor permite probar que existe una gran cantidad de tamaños diferentes de infinito, es decir que en la lista de conjuntos

$$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))),\ \ldots$$

se tiene que no existe una biyección entre un conjunto y el siguiente, sin embargo siempre existe una función inyectiva. (Se interpreta como que cada conjunto tiene "tamaño.es trictamente mayor que el anterior.)

2.2. Principios básicos de conteo

En la sección anterior, establecimos que un conjunto X es finito si para algún natural n existe una función biyectiva

$$f : \{1, \ldots, n\} \to X.$$

En este caso decíamos que n es el cardinal de X, o que X tiene n elementos. Sabemos entonces expresar de forma precisa lo que significa *contar* un conjunto finito, que es en definitiva determinar su cardinal.
A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre desarrollar estrategias para contar.
Para ilustrar la complejidad que puede tener el problema de contar, planteemos dos ejemplos:

1. ¿Cuál es el cardinal del siguiente conjunto de símbolos $\{*, 0, 35, +, a, k\}$?
2. ¿Cuántas palabras de 12 letras (no necesariamente pertenecientes al diccionario) tienen dos vocales consecutivas?

En el primer caso, se puede observar que el conjunto tiene 6 elementos. Pero la resolución del segundo presenta cierta complejidad. El conteo de todas las posibles palabras de largo 12 es ya un problema no trivial que equivale, por ejemplo, a contar funciones $f : \{1, \ldots, 12\} \to \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es el abecedario. Agreguemos a esto que debemos determinar cuales de todas estas funciones corresponden a palabras con dos vocales consecutivas.

Veremos aquí algunas propiedades fundamentales que servirán de punto de partida para atacar problemas de conteo a lo largo de todo el capítulo.

2.2.1. Principio de la suma

Un primer enunciado del principio de la suma es el siguiente:

Principio de la suma
Si una tarea puede ser realizada de m formas diferentes, y otra tarea puede ser realizada de n formas diferentes, y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay $m+n$ formas de realizar una o la otra.
A modo de ejemplo, consideremos el siguiente problema:

Ejemplo 2.2.1. Una niña va a un quiosco y quiere elegir una golosina de entre dos frascos. En uno de los frascos hay 25 caramelos surtidos (sorprendentemente todos diferentes), mientras que el otro contiene 10 chicles (todos de diferente sabor). La niña calcula que tiene $25+10=35$ opciones para elegir su golosina.

En el ejemplo anterior se puede interpretar cada frasco como un conjunto, y las opciones de escoger golosinas de un frasco como el cardinal de dicho conjunto. Por otro lado la elección que se le ofrece a la niña es equivalente a juntar todas las golosinas en una bolsa y pedirle que saque de allí una unidad cualquiera. Este nuevo conjunto es la unión de los dos conjuntos anteriores. Luego si A es el conjunto de los caramelos y B es el conjunto de los chicles, el principio de la suma en este caso puede leerse como la igualdad $\#(A\cup B)=\#A+\#B$. De aquí extraemos una enunciación un poco más precisa de este principio:

Teorema 2.2.2 (Principio de la suma)**.** *Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Entonces $\#(A\cup B)=(\#A)+(\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A=m$ y $\#B=n$. Esto quiere decir que existen dos funciones biyectivas $f:\{1,\dots,m\}\to A$ y $g:\{1,\dots,n\}\to B$. Definimos la función $h:\{1,\dots,m+n\}\to A\cup B$ por:

$$h(k)=\begin{cases} f(k) & \text{si } k\leq m\\ g(k-m) & \text{si } k>m\end{cases}$$

Debemos probar que h es biyectiva, luego queda probada la tesis.
Veamos primero que es inyectiva. Supongamos que $h(k)=h(r)$ (sin pérdida de generalidad podemos asumir $k\leq r$). Distinguimos tres casos:

- Si $k,r\leq m$, entonces $f(k)=f(r)$, y como f es inyectiva, k=r.
- Si $k\leq m<r$, entonces $h(k)=f(k)\in A$ y $h(r)=g(r-m)\in B$. Pero esto es absurdo porque A y B son disjuntos.
- Si $k,r>m$, entonces $g(k-m)=g(r-m)$, lo que implica $k-m=r-m$ y luego $k=r$.

Tenemos entonces la inyectividad de h.
Probemos ahora que h es sobreyectiva. Si $x \in A \cup B$ podemos distinguir dos casos:

- Si $x \in A$, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(k) = x$ y luego $h(k) = x$.
- Si $x \in B$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g(k) = x$ y luego $h(k+m) = x$.

Concluimos que h es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. □

Usando la asociatividad de la unión podemos deducir lo siguiente:

Corolario 2.2.3. *Si $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (\#A_1) + \cdots + (\#A_k)$$

2.2.2. Principio del producto

Consideramos ahora el siguiente enunciado, que se conoce como principio del producto:
Principio del producto
Si un procedimiento puede ser dividido en un primer paso para el cual hay m posibilidades y un segundo paso, y si para cada forma de realizar el primer paso hay luego n formas de realizar el segundo, entonces el procedimiento puede ser realizado de m.n formas diferentes.
Este principio es un poco más complejo y para lograr una formulación más precisa en términos de la teoría de conjuntos vamos a ilustrar con dos ejemplos.
Para el primero estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.4. En un bar, el almuerzo ofrecido consiste de una fórmula de plato principal y postre. Para el plato principal el bar dispone de siete opciones, mientras que tiene sólo cinco opciones de postre. ¿Cuántas posibles fórmulas es posible armar?

Reinterpretando lo anterior, podemos llamar A al conjunto de platos principales y B al conjunto de postres. Luego podemos ver las diferentes fórmulas como el conjunto $A \times B$. La regla del producto puede interpretarse de la siguiente manera:

Proposición 2.2.5. *Sean A y B conjuntos finitos. Entonces $\#(A \times B) = (\#A).(\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$, entonces existen funciones biyectivas $f : \{0, \ldots, m-1\} \to A$ y $g : \{0, \ldots, n-1\} \to B$.
Queremos definir una función biyectiva $h : \{0, \ldots, nm-1\} \to A \times B$. Para esto recordemos el teorema de división entera tomando m como divisor: *Dado $k \in \mathbb{N}$ existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ tales que $k = qm + r$. Luego definimos:*

$$h(k) = (f(r), g(q)), \text{ donde } k = qm + r.$$

Para ver que esta función es inyectiva suponemos que $h(k) = h(\ell)$, es decir que si $k = qm + r$ y $\ell = q'm + r'$, entonces $f(r) = f(r')$ y $g(q) = g(q')$. Como f y g son inyectivas tenemos que $q = q'$ y $r = r'$, lo que implica $k = \ell$.
Para ver que es sobreyectiva tomemos un par (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ y pongamos $r = f^{-1}(a)$ y $q = g^{-1}(b)$. Luego es claro que $h(qm + r) = (a, b)$.
Concluimos entonces que h es biyectiva, por lo que se cumple la tesis.
Otra forma (tal vez más directa) de ver que h es biyectiva es verificando que la función

$$(a, b) \mapsto g^{-1}(b)m + f^{-1}(a)$$

es su inversa. □

Sin embargo podemos observar que el principio del producto tal como lo hemos enunciado es más general que esto, ya que la Proposición 2.2.5 no contempla el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.6. Un día el bar decide ofrecer otra promoción. Se trata de un plato principal entre las siguientes opciones: colita de cuadril, filete de merluza o tarta de zapallitos. Con el plato principal se ofrece sin cargo la bebida con el siguiente criterio:

- La colita de cuadril (C) puede ir acompañada por vino tinto, gaseosa sabor cola o agua.
- El filete de merluza (M) puede ir acompañado con vino blanco, jugo de naranja o agua.
- La tarta de zapallitos (Z) puede ir con licuado de frutas, jugo de naranja o agua.

Usando el principio del producto uno puede rápidamente concluir que las posibles combinaciones son $3 \cdot 3 = 9$. Podemos pensar que $A = \{C, M, Z\}$ es el conjunto de los platos principales, mientras que hay tres conjuntos diferentes de bebidas

- $B_C = \{\text{vino tinto}, \text{gaseosa cola}, \text{agua}\}$
- $B_M = \{\text{vino blanco}, \text{jugo de naranja}, \text{agua}\}$
- $B_Z = \{\text{licuado de frutas}, \text{jugo de naranja}, \text{agua}\}$

Luego el conjunto de opciones no puede codificarse por un producto cartesiano de una forma directa.

En el ejemplo anterior $\{B_C, B_M, B_Z\}$ es una familia de conjuntos indexada en A, y una opción admisible es un par (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B_x$. Generalizando esta observación podemos dar otra formulación del principio del producto:

Teorema 2.2.7 (Principio del producto)**.** *Sea I un conjunto finito con m elementos y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos finitos tal que $\#A_i = n$ para todo $i \in I$. Pongamos $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i$ y consideramos el conjunto*

$$X = \{(i,a) \in I \times \mathcal{A} : a \in A_i\}.$$

Entonces $\#X = m.n$

Demostración. Probaremos que $X \simeq I \times \{1,\ldots,n\}$, luego por la Proposición 2.2.5 se obtiene lo buscado.
Como para todo $i \in I$ se tiene que $\#A_i = n$, tenemos que existen funciones biyectivas $f_i : \{1,\ldots,n\} \to A_i$. Definimos entonces una función $h : I \times \{1,\ldots,n\} \to X$ por

$$h(i,k) = (i, f_i(k)).$$

Se deja como ejercicio verificar que esta función h es biyectiva. Luego el teorema queda demostrado. □

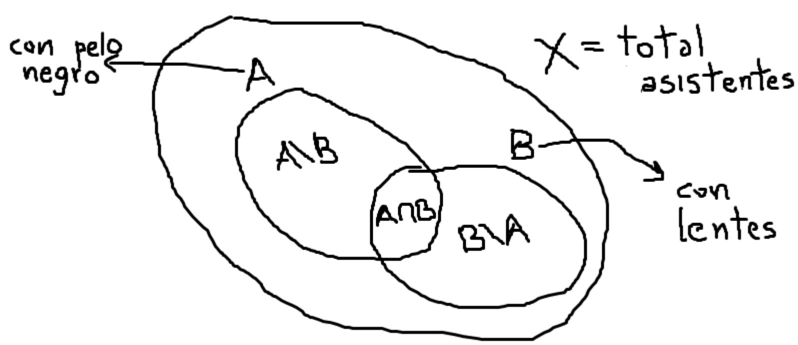
2.2.3. Principio de Inclusión-Exclusión

El principio de la suma resuelve el problema de contar los elementos de la unión de conjuntos disjuntos. Sin embargo este es un caso bastante particular y es natural preguntarse acerca de lo que sucede en caso de que los conjuntos que se están uniendo no sean disjuntos.

Ejemplo 2.2.8. Supongamos que tenemos un grupo de personas del cual sabemos que:

- 47 tienen pelo negro,
- 23 usan lentes,
- 17 usan lentes y tienen el pelo negro.

Podemos ayudarnos con el siguiente dibujo:



Observemos que los datos de arriba pueden expresarse como sigue:

- $\#(A \cap B) = 17$
- $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) = 47 - 17 = 30$
- $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) = 23 - 17 = 6$

Por el principio de la suma se tiene

$$\#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \#(B \setminus A) + \#(A \cap B) = 30 + 6 + 17 = 53.$$

Pero había otra forma de expresar esto:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B). \tag{2.1}$$

Observemos que, al sumar los cardinales de A y B, estamos contando dos veces la intersección, por lo que tenemos que restar después el cardinal de ésta para eliminar los casos repetidos.

Ejercicio 2.2.9. Construir un ejemplo similar al anterior con tres conjuntos en lugar de dos y ver cómo quedaría la igualdad (2.1).

En general, para una cantidad finita arbitraria de conjuntos tenemos lo siguiente:

Teorema 2.2.10 (Principio de Inclusión-Exclusión)**.** *Consideremos $A_1, \ldots, A_k$, una familia de conjuntos finitos todos incluidos en un conjunto X, con $k \geq 2$. Luego*

$$\#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right) = \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\leq i<j\leq k} \#(A_i \cap A_j)\right) + \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_i\right).$$

Demostración. Vamos a probarlo en por inducción en la cantidad de conjuntos $k \geq 2$. En el caso $k = 2$, Supongamos ahora que el principio de inclusión-exclusión se cumple para cierto k y consideremos en X la colección de subconjuntos $A_1, \ldots, A_{k+1}$. Aplicando la fórmula a los primeros k conjuntos, tenemos

$$\#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right) = \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_i\right) - \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_i\right). \tag{2.2}$$

Observemos que

$$\bigcup_{1\leq i\leq k+1} A_i = \left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right) \cup A_{k+1}.$$

Aplicando primero la hipótesis de recurrencia para $k = 2$ se tiene

$$\# \bigcup_{1\leq i\leq k+1} A_i = \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_i\right) + \#A_{k+1} - \#\left(\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right)$$

En esta igualdad aplicamos

- el principio de inclusión-exclusión para k subconjuntos al primer sumando de la derecha, se tiene

$$\#A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i \leq k} A_i \right) = \#A_{k+1} - \left(\sum_{1 \leq i \leq k} \#A_{k+1} \cap A_i \right) + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq k} \#(A_{k+1} \cap A_i \cap A_j) \right) - \cdots + (-1)^k \# \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k+1} A_i \right).$$

- la ley distributiva de $\cap$ respecto a $\cup$ al último sumando de la derecha.

Combinando todo, obtenemos lo que queremos probar. $\square$

Para mostrar una aplicación de este principio consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.11. Calculemos la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 1000 que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 ni de 5. Notamos por c_1, c_2 y c_3 la condición de ser múltiplo de 2, 3 y 5 respectivamente. Luego, siguiendo la notación mostrada anteriormente, vemos fácilmente que:

- $N(c_1) = \frac{1000}{2} = 500$
- $N(c_2) = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $N(c_3) = \frac{1000}{5} = 200$
- $N(c_1, c_2) = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$
- $N(c_1, c_3) = \frac{1000}{10} = 100$
- $N(c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$
- $N(c_1, c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33.$

Luego por el Principio de Inclusión-Exclusión se tiene que la cantidad buscada es

$$1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266.$$

2.2.4. Permutaciones

Consideremos el siguiente problema:

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras A,B,C,D,E y F?.

Observemos que para elegir la primera letra tenemos 6 posibilidades. Luego de esta elección, nos quedan 5 posibilidades para la siguiente letra. Entonces por el principio del producto, tenemos $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades para elegir las primeras dos letras. Siguiendo de este modo, podemos concluir que la cantidad de formas de ordenar estas letras es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$.

Para generalizar y abstraer este problema, observemos que el problema de contar las formas de ordenar n símbolos diferentes es equivalente al problema de contar reordenaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, es decir que existe una función biyectiva entre el conjunto de todas las posibles palabras formadas por el conjunto original de símbolos y el conjunto de todas las posibles reordenaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Por esto nos concentraremos en este último conjunto, del que daremos una definición.

Podemos ver una reordenación de $\{1, \ldots, n\}$ como una función biyectiva, pues escribir la secuencia $3, 2, 4, 1, 5$ es equivalente a definir una función

$$f : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$$

de forma tal que $f(1) = 3$ (el tres ocupa el primer lugar), $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 5$. Definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es biyectiva}\},$$

y notamos $P_n = \#\mathcal{S}_n$. Decimos que P_n es el **número de permutaciones de** n **elementos**. Así la identificación de $\mathcal{S}_n$ con las formas de ordenar n queda

$$f \mapsto f(1)f(2)\ldots f(n).$$

En el primer ejemplo, vimos que $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Esto nos da una idea de lo que debe ser P_n para cualquier n. En general tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $P_n = n! = n.(n-1)\ldots 2$.*

Demostración. Probaremos esto por inducción.
Observemos que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1$, puesto que la función nula es el único elemento de $\mathcal{S}_n$, entonces $P_0 = 0! = 1$.
Supongamos que $P_n = n!$. Luego observamos que ordenar el conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ es un proceso que se puede hacer en dos pasos:

- Se coloca primero un elemento en el lugar $n + 1$. Para esto se tienen $n + 1$ posibilidades.
- Se ordenan los restantes n elementos en los primeros n lugares. Para esto se tienen $P_n = n!$ posibilidades.

Por el principio del producto se tiene $P_{n+1} = (n+1).n! = (n+1)!$. □

Podemos interpretar la prueba anterior en los términos del Principio del Producto. Aquí el conjunto I es $\{1, \ldots, n+1\}$, y para cada $i \in I$ se tiene que

$$A_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1\} : f \text{ es biyectiva}\}.$$

Se observa que $A_i \simeq \mathcal{S}_n$ para todo $i \in I$, por lo que $\#A_i = n!$. Luego el conjunto

$$X = \{(i, f) : i \in I, f \in A_i\}$$

tiene cardinal $n!(n+1) = (n+1)!$. Por otro lado uno puede observar fácilmente que $\mathcal{S}_{n+1} \simeq X$, mediante la función biyectiva $f \mapsto (f(n+1), f|_{\{1,\ldots,n\}})$.

Ejercicio 2.2.13. Una cantidad n de personas se sientan alrededor de una mesa circular para jugar un juego de cartas. La silla ocupada por cada persona no tiene ninguna injerencia en el juego, sin embargo la persona que cada jugador tenga a la derecha o a la izquierda sí la tiene.
¿Cuántas configuraciones posibles hay?

El número hallado en el ejercicio anterior se conoce como el número de **permutaciones circulares de n elementos**, y se nota por PC_n. Vamos a aprovechar lo que sabemos de relaciones de equivalencia para expresar PC_n como el cardinal de un conjunto.

Observemos que la diferencia entre la cantidad buscada en el Ejercicio 2.2.13 y la cantidad de permutaciones (usuales) es que los n elementos se ordenan de forma circular en lugar de ordenarse de forma lineal. Por ejemplo, la ordenación lineal 135246 (de 6 personas) es diferente a la ordenación 524613, pero ambas coinciden cuando se piensan como permutaciones circulares.

Así, por cada permutación circular de n elementos, se tienen n permutaciones lineales (podríamos formalizar esto en términos de relaciones de equivalencia, si quisiéramos, lo dejamos para el lector interesado en hacerlo). Se deduce que la cantidad de permutaciones circulares es

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = (n-1)!$$

2.2.5. Arreglos

En la sección anterior consideramos las formas de reordenar n símbolos diferentes, lo que es igual al cardinal del conjunto de funciones biyectivas de $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. Variemos un poco esto y consideremos para dos números fijos $k \leq n$ el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(n, k) = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Luego escribimos $A_k^n = \#\mathcal{A}(n, k)$. Este número, llamado **arreglos de n elementos tomados de a k**, puede interpretarse como la cantidad de posibilidades de formar palabras de largo k usando n símbolos diferentes sin repetirlos. Hacemos aquí, al igual que en el caso de las permutaciones, la identificación

$$f \mapsto f(1)f(2)\dots f(k).$$

Es claro que $A_n^n = P_n$.

Queremos encontrar una fórmula para A_k^n. Para esto observemos que definir una función $f \in \mathcal{A}(n,k)$ puede hacerse en dos pasos:

1. Se elige $f(1)$, para lo cual se tienen n posibilidades.
2. Se completan las imágenes de los restantes números $2,\dots,k$. Para esto se tienen A_{k-1}^{n-1} posibilidades.

Del principio del producto obtenemos

$$A_k^n = n.A_{k-1}^{n-1} = n.(n-1).A_{k-2}^{n-2} = \dots = n.(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.2.6. Arreglos con repetición

Supongamos ahora que permitimos repeticiones en el caso anterior, es decir, consideramos palabras de largo k escritas en un abecedario de n letras. La cantidad de formas de hacerlo se denotará por AR_k^n, estos son los **arreglos con repetición de n elementos de largo k**. En este caso no es necesario que k sea menor o igual a n. Observar que este número es el cardinal del conjunto

$$\{1,\dots,n\}^{\{1,\dots,k\}} = \{f : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\} : f \text{ función}\}.$$

Este es el producto cartesiano de $\{1,\dots,n\}$ por si mismo k veces, luego por la regla del producto tenemos $\#AR_k^n = n^k$.

2.2.7. Cantidad de relaciones

Consideremos un conjunto finito $X = \{x_1,\dots,x_n\}$. ¿Cuántas relaciones pueden definirse en X?

Para responder esta pregunta recordemos que el conjunto de las relaciones en X es equipotente con el conjunto de las matrices de $n \times n$ de ceros y unos. Luego es este último conjunto el que tenemos que contar. Observamos que una matriz de ceros y unos te tamaño $n \times n$ es un arreglo con repetición de dos elementos de largo n^2. Luego existen 2^{n^2} relaciones en X.

Si ahora queremos contar la cantidad de relaciones en X que cumplan con cierta propiedad, podemos mirar la caracterización de estas relaciones en términos de sus matrices asociadas.

1. **Relaciones reflexivas:** Las relaciones reflexivas corresponden a las matrices que tienen 1 en todas las entradas de la diagonal. Luego los espacios que quedan libres son $n^2 - n$, por lo que concluimos que la cantidad de estas relaciones es $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$.

2. **Relaciones simétricas:** Las relaciones simétricas se corresponden con las matrices simétricas, es decir que quedan determinadas por las entradas que están por encima de la diagonal (diagonal incluida). La cantidad de estas entradas es

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Luego la cantidad de relaciones simétricas en X es $2^{\frac{n.(n+1)}{2}}$.

2.2.8. Combinaciones

Nos interesa ahora estudiar una familia de problemas que consisten en elegir subconjuntos de un conjunto dado sin tener en cuenta el orden. Miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.14. Una persona entra a una heladería y pide un helado de tres sabores. Cuando llega al mostrador se encuentra con que tiene 20 sabores para elegir. ¿Qué posibilidades tiene de armar su helado?

En general notaremos por C_k^n al número de formas de tomar k elementos de un conjunto de cardinal n y lo llamamos **combinaciones de n tomadas de a k** (puede encontrarse también en la literatura la notación $\binom{n}{k}$ para indicar esta cantidad). De esta forma el problema planteado en el ejemplo anterior consiste en calcular C_3^{20}. Dicho de otra forma, C_k^n es el número de subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n. Para ser más precisos podemos escribirlo como el cardinal de

$$\mathcal{C}(n,k) = \{A \subset \{1,\dots,n\} : \#A = k\}.$$

Observación 2.2.15.

1. Hay algunos números combinatorios (así le llamaremos a los números C_k^n) que son muy fáciles de determinar. Por ejemplo es claro que $C_0^n = C_n^n = 1$, pues hay un solo subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ con 0 elementos y uno solo con n elementos. También puede verse que $C_1^n = n$, esto es, la cantidad de formas de tomar un subconjunto unitario de $\{1,\dots,n\}$.

2. Observar que $C_k^n = C_{n-k}^n$, ya que elegir un subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ es equivalente a elegir su complemento.

Teorema 2.2.16. *(Fórmula de Stiefel) Para $k \leq n$ se tiene la siguiente igualdad*

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n.$$

Demostración. Existen dos tipos (disjuntos) de subconjuntos de k elementos de un conjunto de $n+1$ elementos:

- Conjuntos que contienen el elemento $n+1$. Estos conjuntos son C^n_{k-1}, porque para completarlos se necesitan tomar otros $k-1$ elementos de entre los restantes n.
- Conjuntos que no contienen al $n+1$. Estos son C^n_k.

Luego la tesis del teorema sale directamente del principio de la suma. $\square$

A partir de la Fórmula de Stiefel podemos escribir los primeros números combinatorios:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C^0_0 & & & & \\
 & & & C^1_0 & & C^1_1 & & & \\
 & & C^2_0 & & C^2_1 & & C^2_2 & & \\
 & C^3_0 & & C^3_1 & & C^3_2 & & C^3_3 & \\
C^4_0 & & C^4_1 & & C^4_2 & & C^4_3 & & C^4_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

La figura anterior es conocida como **Triángulo de Pascal**.

La siguiente proposición relaciona las combinaciones con los arreglos y las permutaciones.

Proposición 2.2.17. *Tomemos $k \leq n$. Luego se cumple la igualdad*

$$A^n_k = C^n_k.P_k. \tag{2.3}$$

Demostración. Aquí podemos usar el principio del producto y dividir la tarea de elegir una función inyectiva $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ en dos pasos:

1. Se elige la imagen de f, para lo que se tienen C^n_k posibilidades.
2. Se ordenan los elementos elegidos. De esta forma se define una función biyectiva entre $\{1, \ldots, k\}$ y $f(X)$, lo que termina de definir la función f. Para esto tenemos P_k posibilidades.

De lo anterior obtenermos (2.3). $\square$

A partir de la igualdad (2.3) y las fórmulas de arreglos y permutaciones obtenemos la fórmula para las combinaciones:

$$C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \tag{2.4}$$

De esta forma podemos terminar el Ejemplo 2.2.14 concluyendo que el cliente tiene

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140.$$

posibilidades de armar su helado.

2.2.9. Teorema del binomio

Nos enfocamos ahora en el problema de calcular la n-ésima potencia de un binomio $x + y$. Veamos los primeros ejemplos:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^2$

Observamos que en los primeros ejemplos los coeficientes de los monomios corresponden a las primeras filas del triángulo de Pascal. Esto inspira el siguiente resultado:

Teorema 2.2.18 (Teorema del Binomio)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k. \tag{2.5}$$

Daremos dos pruebas del Teorema del Binomio. La primera será por inducción mientras que para la segunda usaremos un argumento puramente combinatorio.

Primera prueba del Teorema del binomio. Como vimos en los ejemplos, el caso para $n = 1$ ya está probado. Supongamos entonces que la fórmula (2.5) se cumple para cierto n. Luego

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y).\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_k^n x^{n+1-k} y^k + C_k^n x^{n-k} y^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n x^{n+1-k} y^k \\
&= C_0^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k + C_n^n y^{n+1}
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stiefel en el sumando del medio y las igualdades $C_0^n = C_0^{n+1} = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ en los otros, obtenemos

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k.$$

La prueba termina usando el principio de inducción. $\square$

Para escribir la segunda prueba veamos lo que sucede en le caso $n = 3$. Desarrollamos entonces $(x+y)^n$ de la siguiente manera:

1º. Del producto $(x+y)(x+y)(x+y)$ elegimos x en los tres factores, luego obtenemos x^3.

2º. Elegimos x de los dos primeros e y del tercero. Obtenemos x^2y.

3º Elegimos x del primero y del tercero e y del cuarto. Obtenemos x^2y

4º Elegimos y del primero y x de los otros dos. Obtenemos x^2y.

Siguiendo de esta manera, los pasos 4, 5 y 6 corresponden a elegir dos y y un x, y el séptimo a elegir y en todos los factores. Finalmente tenemos:

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Segunda prueba del Teorema del binomio. Generalizado la idea anterior vemos que elegir de cada uno de los n factores $(x+y)$ de $(x+y)^n$ una variable x o y se corresponde con elegir una función $f : \{1, \dots, n\} \to \{x, y\}$. De esta forma por ejemplo $f(k) = x$ significa que estamos tomando x en el k-ésimo factor. Se tiene entonces

$$(x+y)^n = \sum_{f \in X} f(1) \dots f(n),$$

donde $X = \{x, y\}^{\{1,\dots,n\}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ a $\{x, y\}$.

El coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en el desarrollo es exactamente la cantidad de funciones f que cumplen $f(1) \dots f(n) = x^{n-k}y^k$, es decir, el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \#f^{-1}(y) = k\}.$$

Este es equipotente con $\{A \subset \{1, \dots, n\} : \#A = k\}$, luego el coeficiente que estamos buscando es C^n_k. $\square$

2.2.10. Combinaciones con repetición

Supongamos ahora que 10 personas están en un bar y cada una encarga una bebida entre las siguientes posibles: Agua, Cerveza, Limonada, Vino. ¿Cuántas pedidos son posibles?

Observar que los pedidos posibles pueden pensarse como las posibles formas de elegir 10 letras entre A, C, L y V. Aquí listamos algunas posibilidades:
AAAAACCLVV, AAAAAAAAAA, ACCVVVVVVV, CCCCLLVVVV

Observemos que se trata de combinar 10 elementos de A,C,L,V, sin que importe el orden y con posibles repeticiones. Es natural entonces llamar a este número "combinaciones con repetición de 4 tomados de a 10 y notarlo CR^4_{10}.

En general, notamos CR^n_k, y llamamos **combinaciones con repetición de n tomadas de a k** a la cantidad de formas de tomar k elementos en un conjunto de n, con posibles repeticiones, y sin que importe el orden.

Podemos interpretar los ejemplos de arriba, en términos de los símbolos $-$ y $/$, como sigue:

$$\begin{array}{rl} AAAAACCLVV & -----/--/-/-- \\ AAAAAAAAAA & ----------/// \\ ACCVVVVVVV & -/--//------- \\ CCCCLLVVVV & /----/--/---- \end{array}$$

Esto es, son las posibles formas de elegir 10 lugares (los ocupados con el símbolo $-$ en una lista de $10 + (4-1)$ lugares (todos los ocupados). Esto es

$$CR^4_{10} = C_1^{10+4-1}0.$$

En general, se tiene el siguiente resultado.

$$\mathcal{CR}(n,k) = C_k^{k+n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Notemos además que CR_k^n puede interpretarse como la cantidad de posibles soluciones de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_n = k,$$

con variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Aquí x_i corresponde al número de veces que se elije el elemento i. Luego podemos escribir

$$CR_k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Observemos además que CR_k^n también puede verse como la cantidad de formas de meter k pelotas iguales en n cajas distintas.

Resumiendo, el número CR_k^n puede verse como la cantidad de:

- formas de elegir k elementos de un conjunto de n permitiendo repeticiones y sin que importe el orden.
- soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.
- maneras de distribuir k objetos iguales en n recipientes distintos.

2.2.11. Otras cantidades interesantes

2.2.12. Permutaciones con repetición

Pensemos en cuántas palabras pueden formarse con las letras de la palabra IBIRAPITA

Podemos imaginarnos una gran familia de ejemplos que consisten, en esencia, en este mismo problema: contar las formas de ordenar n símbolos sabiendo que estos se repiten con frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ (suponemos aquí que $n_1 + \cdots + n_k = n$). La cantidad descrita es llamada **permutaciones de n elementos con repeticiones de frecuencias** $n_1, \ldots, n_k$, y se denota por $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$. Este número puede verse como el cardinal del conjunto

$$\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k} = \left\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \# f^{-1}(i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \right\},$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_k$, y también se nota como $C^n_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$, porque generaliza los números combinatorios en el sentido de que $C_k^n = C^n_{k,n-k}$. En efecto, el número de la izquierda cuenta la cantidad de subconjuntos de cardinal k de $\{1, 2, \cdots, n\}$, el de la derecha cuenta la cantidad de formas de partir el conjunto $\{1, 2, \cdots, k\}$ en pares ordenados de subconjuntos de cardinales respectivos k y $n-k$. En vistas de que el complemento en $\{1, 2, \cdots, n\}$ de un subconjunto de orden k es un subconjunto de orden $n-k$ se tiene la igualdad.

Proposición 2.2.19. *Para $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, se tiene*

$$P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción en $k \geq 1$. Para $k = 1$ se tiene que los dos términos valen 1 y por tanto coinciden.
Supongamos que está probado para k y que $n_1 + n_2 \cdots n_k + n_{k+1} = n$. Luego el principio del producto nos da la igualdad

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}} = C^n_{n_1}.P_{n-n_1;n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\cdots n_{k+1}!}$$

donde en la última igualdad se utilizó la fórmula de las combinaciones y la hipótesis de recurrencia. Simplificando, se obtiene el resultado buscado. □

Usando esta fórmula podemos rápidamente resolver el problema planteado al principio. Observar que las repeticiones correspondientes a las letras I, B, R, A, P y T son $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n_5 = 1$ y $n_6 = 1$, luego la cantidad buscada es

$$P_{9;1,1,3,2,1,1} = \frac{9!}{1!,1!,3!,2!,1!,1!} = 9x8x7x5x4x3.$$

Usemos ahora las permutaciones con repetición para generalizar el teorema del binomio (Teorema 2.2.18).

Teorema 2.2.20 (Teorema Multinomial)**.** *El coeficiente del monomio $x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ es*

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}.$$

Demostración. Siguiendo la idea de la prueba combinatoria del Teorema 2.2.18 puede verse que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo es $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$. □

Para ilustrar la demostración anterior supongamos que $n = 5$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 1$ y que queremos formar $x_1^2x_2x_3^2$. Una manera de obtener este monomio es haciendo la siguiente elección (marcada en negrita):

$$(x_1+x_2+x_3)^5 = (x_1+x_2+\mathbf{x_3}).(x_1+\mathbf{x_2}+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(x_1+x_2+\mathbf{x_3}).$$

Esto se identifica con la palabra $x_3x_2x_1x_1x_3$. Luego las formas de obtener dicho monomio en el desarrollo están en biyección con el conjunto de las palabras de largo cinco que se pueden formar con tres letras repitiendo dos veces x_1 y x_3. Esta cantidad es, como ya vimos, $P_{5;2,2,1}$.

2.2.13. Desórdenes

Consideramos aquí el siguiente problema: dada una palabra formada por n símbolos diferentes, ¿cuántas palabras se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original? Llamaremos a este número **desórdenes de** n **elementos** y lo notaremos por D_n. Observamos que se trata del cardinal del conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyectiva, } f(i) \neq i \text{ para todo } i\}$$

Una forma de hallar D_n es usando el principio de inclusión-exclusión. Para esto definimos

$$A_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyectiva, } f(i) = i\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_n = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P_{n-k}$ y que hay C_k^n intersecciones de esta forma, luego

$$D_n = P_n - nP_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n P_{n-i}.$$

2.2.14. Desórdenes

Consideramos aquí el siguiente problema: dada una palabra formada por n símbolos diferentes, ¿cuántas palabras se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original? Llamaremos a este número **desórdenes de** n **elementos** y lo notaremos por D_n. Observamos que este número es el cardinal del conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyctiva, } f(i) \neq i \text{ para todo } i\}$$

Una forma de hallar D_n es usando el principio de inclusión-exclusión. Para esto definimos

$$A_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyectiva, } f(i) = i\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_n = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P_{n-k}$ y que hay C_k^n intersecciones de esta forma, luego

$$D_n = P_n - nP_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n P_{n-i}.$$

2.2.15. Cantidad de funciones sobreyectivas

Nos preguntamos ahora cuantas funciones sobreyectivas pueden definirse de un conjunto de n elementos en un conjunto de k elementos ($k \leq n$), es decir, cuál es el cardinal de

$$\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : f \text{ sobreyectiva}\},$$

al que notamos por $Sob(n, k)$.

Para encontrar una fórmula para este número usaremos el principio de inclusión-exclusión. Consideramos entonces $Z = \{1, \ldots, k\}^{\{1,\ldots,n\}}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, k\}$, que tiene cardinal k^n, y los subconjuntos

$$A_i = \{f \in Z : i \notin f(\{1, \ldots, n\})\}.$$

Es claro que el conjunto de funciones sobreyectivas es $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = (k-\ell)^n$ y que hay C_ℓ^k intersecciones de esta forma. Luego tenemos

$$\begin{aligned} Sob(n, k) &= k^n - C_1^k(k-1)^n + C_2^k(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}C_{k-1}^k 1^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k (k-i)^n. \end{aligned}$$

2.2.16. Número de Stirling de segunda especie

El número

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} Sob(n, k)$$

se llama **número de Stirling de segunda especie** y denota la cantidad de particiones formadas por k subconjuntos que pueden hacerse en un conjunto de n elementos.

La cantidad total de particiones se conoce como el n-ésimo **número de Bell** y se denota por

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k).$$

Este puede interpretarse también como el número de relaciones de equivalencia que es posible definir en un conjunto con n elementos.

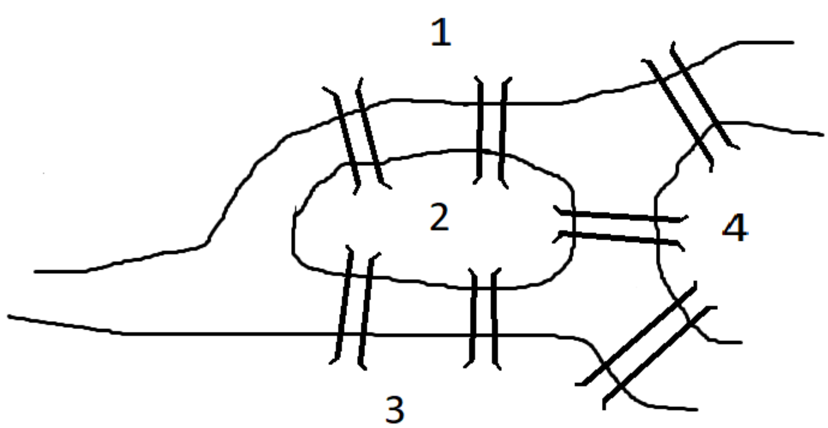
Capítulo 3

Grafos

3.1. Generalidades

Para motivar este capítulo presentaremos dos problemas. El primero es un problema célebre que data del siglo XVI y que, según se considera, da origen a la teoría de grafos. El segundo es un problema lúdico que circula entre los escolares (o circulaba en alguna época y alguna escuela).

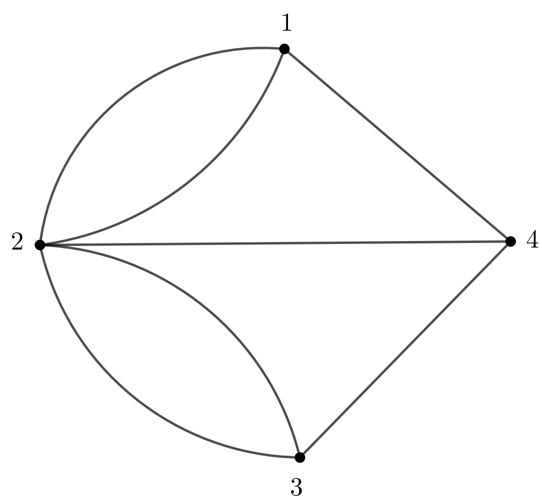
1. Problema de los puentes de Königsberg
La ciudad de Königsberg (antigua capital de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, sobre el que se disponían siete puentes como se muestra a continuación:



En este escenario se plantea el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todos los puentes pasando por cada uno una única vez y terminando el recorrido en el punto de partida?

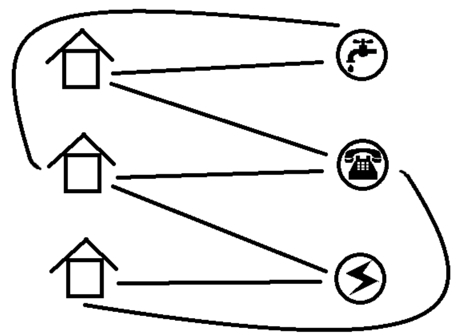
Es posible resolver el problema listando todos los posibles recorridos que no repitan puentes y verificando si entre ellos hay uno que cumpla las condiciones. Sin embargo el matemático suizo Leonard Euler dio una solución en el año 1736 (en una publicación titulada *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) que puede generalizarse a toda una familia de problemas similares a este.

El primer paso en el análisis del problema consiste en simplificar el contexto hasta quedarse con los elementos esenciales del mismo. Observamos entonces que hay dos tipos de objeto en el problema: las regiones y los puentes. Se puede entonces representar el mapa anterior por medio de la siguiente figura, donde las regiones son representadas por puntos y los puentes por aristas. A los efectos del problema que estamos considerando no hay diferencia entre el mapa y esta figura (a la que vamos a denominar *grafo*, o más especificamente en este caso, *multigrafo*).



En la actualidad, la disposición de los puentes es diferente a la descrita, por lo que el problema ha cambiado. El lector puede plantearse entonces, además del propuesto, el problema de los puentes de Kaliningrado.

2. Problema de la conexión de servicios básicos en el plano
Se disponen en un territorio plano tres casas y tres usinas de servicios públicos: agua, telefonía y electricidad. El problema consiste en conectar las tres casas a los tres servicios mediante conectores independientes (cables o ductos) que no se corten entre sí. (Como nos encontramos en un mundo plano, no es posible pasar un cable por encima de otro.)



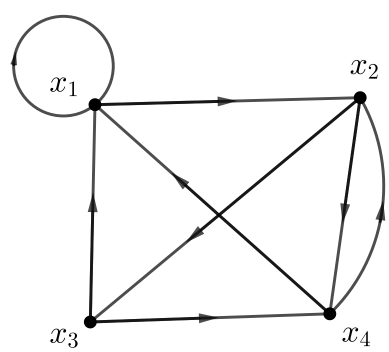
Hay una diferencia esencial entre el primer problema y el segundo. Mientras que el primero depende solamente de la estructura del grafo, es decir, de como están conectados los puntos mediante aristas, en el segundo se agrega una nueva circunstancia: el hecho de que el grafo está contenido en el plano. Veremos más adelante que estos corresponden a dos tipos diferentes de problemas más generales y mostraremos sus soluciones.

3.1.1. Primeras definiciones y ejemplos

Un **grafo dirigido** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito al que llamamos conjunto de **vértices** y E es un subconjunto de $V \times V$ al que llamamos conjunto de **aristas**.

Observar que el conjunto de aristas es una relación en el conjunto de vértices. Tenemos una nueva representación (esta vez geométrica) de las relaciones definidas en un conjunto. Por ejemplo, para el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ podemos representar la relación $\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Nos interesa sobretodo definir grafos no dirigidos, es decir, que tengan aristas no orientadas. Para esto debemos reemplazar los pares ordenados por pares no ordenados.

Dados dos conjuntos X e Y consideramos el conjunto

$$X \cdot Y = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}.$$

Un **grafo no dirigido** (también llamado simplemente **grafo**) es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset V \cdot V$. Las aristas de la forma $\{x, x\} = \{x\}$ se denominan **lazos**

En general, usaremos la notación $G = (V, E)$ tanto para grafos dirigidos como para grafos no dirigidos. Escribimos también en este caso $V(G) = V$ y $E(G) = E$.

Decimos que dos vértices x y y de un grafo G (no dirigido) son **adyacentes** si $\{x, y\}$ es una arista del grafo.

Una arista del tipo $\{x\}$ (o (x, x) para el caso dirigido) se dice **lazo**.

Dado un grafo $G = (V, E)$ sin lazos y un vértice $v \in V$, el **grado de** v se define como

$$gr(v) = \#\{w \in V \mid v \text{ y } w \text{ son adyacentes}\}$$

Notar que el grado de un vértice v coincide con la cantidad de aristas e tales que $v \in e$. El primer resultado, simple y útil en Teoría de grafos es el que se conoce como *Hand-shaking Lemma* o Lema del *apretón de manos.*

Lema 3.1.1. *Lema de hand-shaking Dado un grado $G = (V, E)$ sin lazos, se tiene la siguiente igualdad*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2\#E$$

Demostración. Cada sumando de la izquierda coincide con la cantidad de aristas que "tocan.ª v. En la suma, cada arista $\{v, w\}$ está considerada dos veces, una en $gr(v)$ y otra en $gr(w)$, por lo que el término de la izquierda es exactamente el doble de la cantidad total de aristas. □

La definición de grado de un vértice se extiende al caso de grafos (con eventuales lazos) y también de multigrafos, y vale el lema de hand-shaking, como veremos en el próximo capítulo.

3.1.2. Isomorfismos de grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un **isomorfismo de grafos** si

(i) f es biyectiva, y

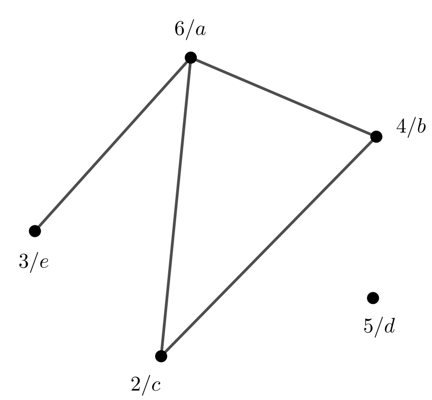
(ii) $\{x, y\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Es decir, dos vértices son adyacentes si y sólo si sus imágenes por f lo son.

Observar que si $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos, entonces queda definida una función biyectiva $f : E_1 \to E_2$ (usamos la misma notación que para la función en los vértices) que asocia a la arista $\{x, y\} \in E_1$ la arista $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Luego notamos al isomorfismo por $f : G_1 \to G_2$ entendiendo esto como una correspondencia tanto entre lo vértices como entre las aristas de ambos grafos. Emplearemos la notación $G_1 \cong G_2$ para indicar que ambos grafos son **isomorfos**, es decir, si existe un isomorfismo entre ellos.

Ejemplo 3.1.2. Consideramos los siguientes grafos:

- $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y E_1 definido por x e y son adyacentes si x e y tienen algún divisor primo en común.
- $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ y $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}\}$.

Definimos $f : V_1 \to V_2$ por $f(2) = c$, $f(3) = e$, $f(4) = b, f(5) = d$ y $f(6) = a$. Puede verse que f es un isomorfismo entre los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.



Observar que f no es el único isomorfismo entre ambos grafos. Por ejemplo uno puede considerar $g : V_1 \to V_2$ por $g(2) = b$, $g(3) = e$, $g(4) = c$, $g(5) = d$ y $g(6) = a$. ¿Hay algún otro isomorfismo?

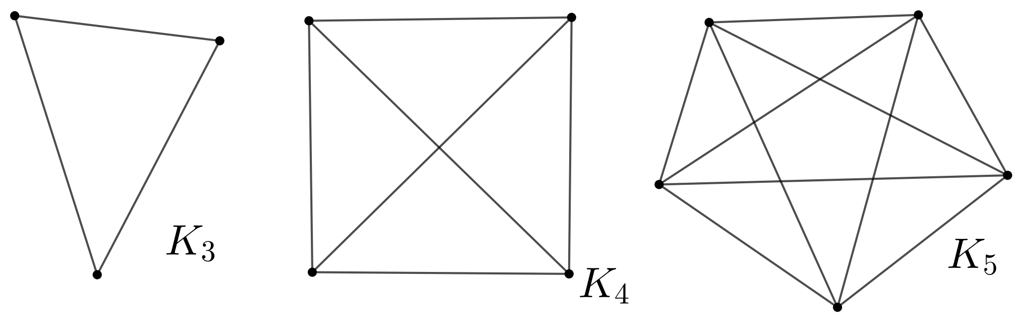
Si G_1 y G_2 son grafos dirigidos, entonces la definición de isomorfismo es análoga. La única modificación que hay que hacer es cambiar los pares en (ii) por pares ordenados.

En general nos interesarán, más que los grafos, las clases de isomorfismo de grafos. Por ejemplo, al mirar los grafos del Ejemplo 3.1.2, veremos los números y las letras simplemente como puntos que están unidos de a pares, sin importar el nombre de los vértices o la representación de las aristas.

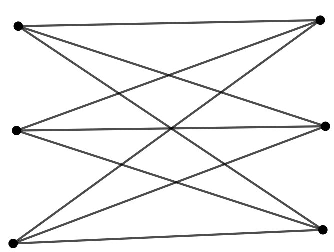
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **completo** si $E = (V \cdot V) \setminus D$, donde

$$D = \{\{x, x\} : x \in V\}$$

es el conjunto de los lazos en V. Es decir que es el grafo sin lazos de vértices V con el máximo número de aristas. Podemos observar que la clase de isomorfismo de un grafo completo sólo depende del número de vértices, es decir para cada $n \geq 1$ todos los grafos completos con n vértices son isomorfos. Luego notamos por K_n a cualquiera de ellos (o a todos ellos).



Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $E = V_1 \cdot V_2$. Haciendo la misma consideración que para el grafo completo, ponemos la notación $K_{n,m}$ para referirnos al grafo bipartito con vértices $V = V_1 \cup V_2$ con $\#V_1 = n$ y $\#V_2 = m$.



$K_{3,3}$

3.1.3. Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido). Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Si fijamos un grafo (o grafo dirigido) G, podemos notar el conjunto de los subgrafos de G como $\mathcal{S}(G)$ y definir en este la siguiente relación de orden:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2.$$

Puede verse que en general esta relación de orden no es total y que tiene al grafo vacío como mínimo y al grafo G como máximo.

Un **encaje** de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ en otro grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función inyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que si $\{x, y\} \in E_1$, entonces $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Denotamos también al encaje por $f : G_1 \to G_2$, y por $f : E_1 \to E_2$ a la función inducida en las aristas. De forma similar se define un encaje de un grafo dirigido en otro.

Dados dos grafos (o grafos dirigidos) G_1 y G_2 escribimos

$$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2.$$

Observación 3.1.3. La relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva pero no es antisimétrica. De todas maneras se tiene un resultado en la dirección de la antisimetría que es el siguiente:

$$G_1 \preceq G_2 \preceq G_1 \Rightarrow G_1 \cong G_2$$

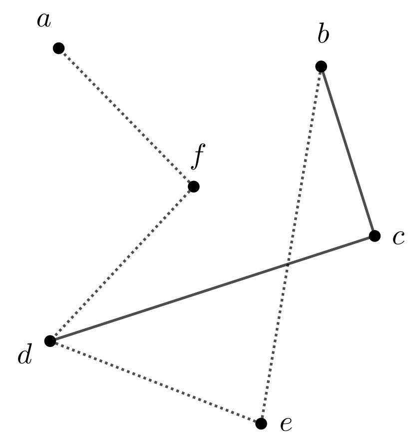
En efecto, probaremos que el encaje $f : G_1 \to G_2$ es un isomorfismo: como hay una función inyectiva (f) de V_1 a V_2 y una función inyectiva (g) de V_2 a V_1, se deduce que $\#V_1 = \#V_2$ y por tanto $f : V_1 \to V_2$ es biyectiva.
Por otra parte, notar que f induce una función $f_E : E_1 \to E_2$ definida por $f(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\}$. Es claro que f_E es inyectiva. De la misma manera se tiene una función inyetiva $g_E : E_2 \to E_1$. Se deduce que $\#E_1 = \#E_2$ y por lo tanto f_E es biyectiva. A partir de esto es claro que f es un isomorfismo.

Proposición 3.1.4. *Se tiene que $G_1 \preceq G_2$ si y sólo si existe G_1' un subgrafo de G_2 que es isomorfo a G_1.*

Demostración.
$(\Rightarrow)$ Supongamos que tenemos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, y que $f : G_1 \to G_2$ es un encaje. Luego definimos el subgrafo $G_1' = (f(V_1), f(E_1))$. Es claro por la definición de encaje que f define un isomorfismo entre G_1 y G_1'.
$(\Leftarrow)$ Un isomorfismo $f : G_1 \to G_1'$ (con $G_2' \leq G_2$) se extiende de forma obvia a un encaje $f : G_1 \to G_2$. $\square$

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido) y $V' \subset V$ un subconjunto cualquiera. El **subgrafo inducido** por V' es el máximo (bajo el orden $\leq$ definido al comienzo de esta sección) subgrafo de G que tiene a V' como conjunto de vértices.

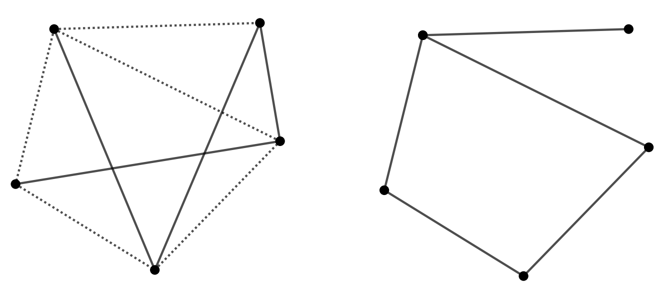
En la siguiente figura puede verse el grafo inducido por los vértices b, c y d de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E = \{\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$.



Definimos el **complemento** de un grafo sin lazos $G = (V, E)$ como el grafo

$$G^c = (V, (V \cdot V) \setminus (E \cup D)),$$

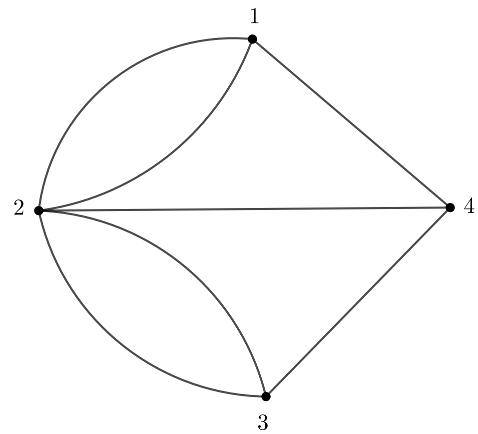
donde D es el conjunto de lazos en V. Es decir que es el grafo que resulta de sacarle a K_n las aristas de G, donde $n = \#V$.



G $\qquad$ G^c

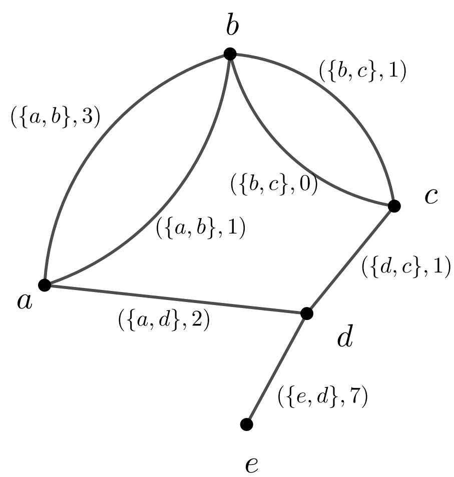
3.1.4. Multigrafos

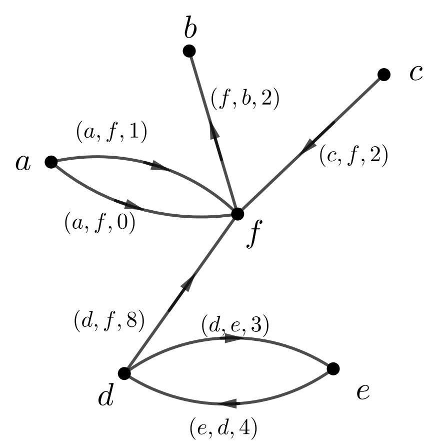
Volvamos al problema de los puentes de Königsberg y a la forma de modelarlo.



Como podemos ver, hay dos aristas entre 1 y 2 y dos aristas entre 2 y 3, luego la figura anterior no se ajusta a nuestra definición de grafo. Haremos entonces las siguientes definiciones:

Un **multigrafo** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \cdot V) \times \mathbb{N}$.
Un **multigrafo dirigido** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \times V) \times \mathbb{N}$.





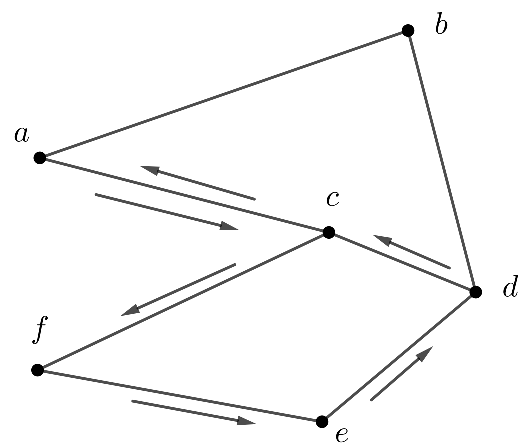
Las definiciones generales dadas anteriormente pueden extenderse (tanto en el caso dirigido como en el caso no dirigido) para definir:

- isomorfismo de multigrafos,
- encaje de un multigrafo en otro,
- sub-multigrafo, y
- sub-multigrafo inducido por un subconjunto de vértices.

No lo hacemos para no entrar en detalles técnicos, pero invitamos al lector interesado a intentarlo.

3.1.5. Caminatas en grafos

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tal que $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ para todo $i = 1, \dots, n$. En este caso decimos que el camino une x_0 con x_n. Si $x_0 = x_n$ el camino se dice **cerrado**.



(a, c, f, e, d, c, a)

La **longitud** del camino es, en este caso, el número n (la cantidad de aristas por las que se pasa). El camino cerrado (x_0) se dice **trivial** y su longitud es 0.
Decimos que un camino es un **recorrido** si no repite aristas, y que es un **camino simple** si no repite vértices con excepción de que se repitan los extremos.
Llamaremos **circuito** a un recorrido cerrado y **ciclo** a un camino simple cerrado.
Observar que un camino simple abierto (no cerrado) es un recorrido. También sucede que un ciclo de longitud mayor o igual a tres es un circuito.
Observar que las definiciones de arriba valen tanto para grafos como para grafos dirigidos.

Para dar un camino en un multigrafo, debemos especificar cuál de las aristas se toma al unir dos vértices adyacentes. Teniendo esto en cuenta definimos un **camino** en un multigrafo $G = (V, E)$ como una secuencia

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n)$$

donde $x_1, \dots, x_n \in V$ y para cada $i = 0, \dots, n-1$, e_i es una arista que une x_i con x_{i+1}. Para multigrafos dirigidos la definición es análoga.

También de manera análoga, se definen **camino**, **recorrido**, **circuito, camino simple** y **ciclo** en multigrafo o en un multigrafo dirigido.
Enunciamos y probamos el siguiente resultado para grafos, aunque vale (y la prueba también) para grafos dirigidos, multigrafos, multigrafos dirigidos.

Proposición 3.1.5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $x, y \in V$. Si existe un camino que une x con y, entonces existe un camino simple que une ambos puntos.*

Demostración. Supongamos que tenemos un camino de largo n desde x a y. Consideramos entonces el conjunto de todos los caminos de x a y con longitud menor o igual a n, al que notamos por $\mathcal{C}_n$. Es claro que este conjunto es no vacío, además es finito porque V es finito. Luego existe un camino $c = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ que minimiza la longitud de todos los elementos de $\mathcal{C}_n$.
Si c no es un camino simple, entonces existen dos índices diferentes $i, j \in \{0, \dots, k\}$ tal que $x_i = x_j$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $i < j$.
Si $j < n$, podemos observar que $c' = (x_0, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_k)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k.
Si $j = n$, se tiene que $i \neq 0$ (la repetición es $x_i = x_n$) y por tanto el camino $c' = (x_0, \dots, x_i)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k.
En ambos casos, se construyó un camino c' en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k, lo que contradice el hecho de que k es el mínimo de las longitudes de los caminos en $\mathcal{C}_n$.
Concluimos entonces que c debe ser un camino simple. $\square$

3.1.6. Conexión

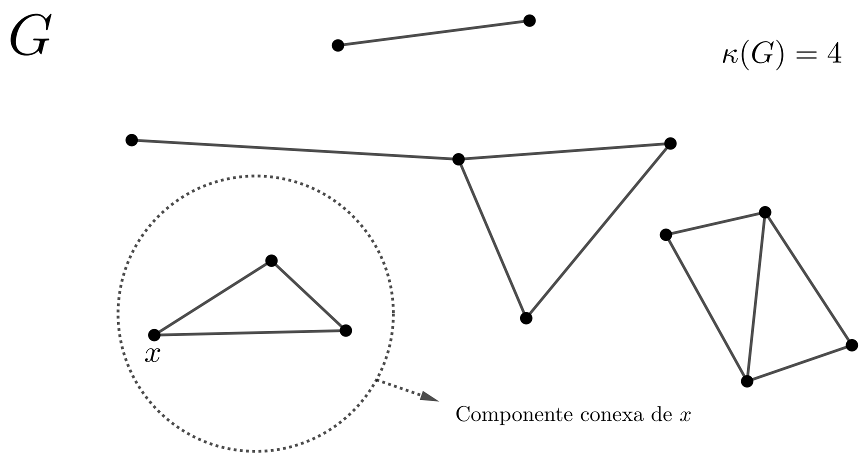
Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **conexo** si para todo par de vértices $x, y \in V$, existe un camino que los une.
Dado un grafo $G = (V, E)$, podemos definir la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de los vértices de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{ existe un camino que une } x \text{ con } y.$$

La **componente conexa** de un vértice $v \in V$ es el subgrafo de G inducido por el subconjunto de vértices

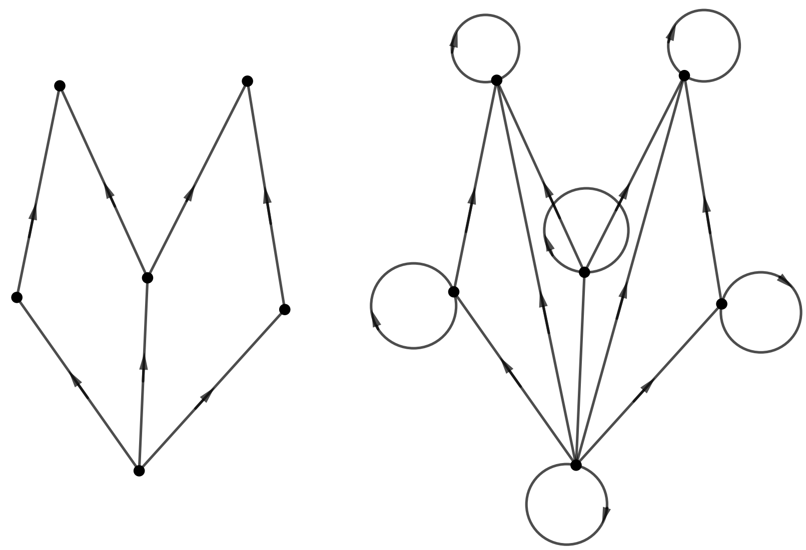
$$V' = \{x \in V \mid \text{ existe un camino de x a v}\}.$$

Usaremos la notación $\kappa(G)$ para indicar el número de componentes conexas del grafo G, que coincide con el cardinal del cociente $V/\mathcal{R}$. Observar que G es conexo si y sólo si $\kappa(G) = 1$.



Puede observarse que la relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia cuyas clases de equivalencia son exactamente las componentes conexas (se deja como ejercicio).
La definición de conexión y de componente conexa vale para multigrafos. También vale que la relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
Sin embargo, en el caso dirigido cambia un poco la situación.
Un grafo (o multigrafo) dirigido G se dice **conexo** si el grafo (multigrafo) que resulta de quitarle el sentido a las flechas de G es conexo.
Al grafo considerado en la definición anterior se lo llama *grafo subyacente de* G.
Para definir componente conexa en el caso dirigido, también se considera el grafo (multigrafo) subyacente.
La relación $\mathcal{R}$ para grafos (multigrafos) dirigidos se define de la misma manera y es claro que no es simétrica. Se tiene un resultado bien diferente en este caso.

Observación 3.1.6. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido sin ciclos,la relación $\mathcal{R}$ es de orden.
Por otro lado, un conjunto ordenado puede verse como un grafo dirigido sin ciclos (sacando los lazos). Sin embargo, si $\leq$ es una relación de orden en V, entonces existe más de un grafo que genera $\leq$. En efecto, los siguientes grafos dirigidos generan la misma relación de orden $\mathcal{R}$.



Hay una noción de *componente conexa* en grafos dirigidos, pero su definición es un poco más técnica y no la presentaremos aquí .

3.1.7. Distancia

Hay una noción de distancia natural en los grafos conexos que está relacionada con la noción de longitud: para un par de vértices $x, y \in V$ tomamos $\mathcal{C}(x, y)$ el conjunto de los caminos que unen a x con y, luego definimos

$$dist(x, y) = \text{mín}\{long(c) : c \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

Observación 3.1.7. En general, una **distancia** o **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que cumple:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.
- Dados tres puntos x, y, z, se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Esta es la desigualdad triangular.)

Luego $dist : V \times V \to \mathbb{N}$ es efectivamente una distancia.

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido y definiéramos análogamente $dist$, no resultaría una distancia en V, ya que no se cumple la segunda condición de la Observación 3.1.7.

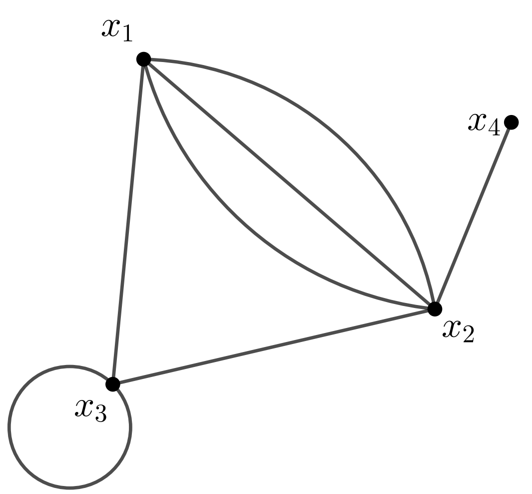
3.2. Recorridos y circuitos Eulerianos

Recordamos el problema de los puentes de Königsberg: se trata de encontrar (o probar la inexistencia de) un circuito que pase por todas las aristas de un multigrafo.

Diremos que un recorrido o un circuito en un multigrafo (no dirigido) G es **Euleriano** si pasa por todas las aristas del multigrafo. La generalización del problema de los puentes de Königsberg puede enunciarse de la siguiente forma:

Problema 3.2.1. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo no dirigido conexo. ¿Existe un recorrido Euleriano en G? ¿Y un circuito Euleriano?*

El **grado** de un vértice x en un multigrafo G, notado por $gr(x)$, es el número de aristas que inciden en el vértice. Un lazo en x cuenta doble para el grado de x (se entiende que incide dos veces en el vértice x).



$gr(x_1) = 4$
$gr(x_2) = 5$
$gr(x_3) = 4$
$gr(x_4) = 1$

Proposición 3.2.2. *Si $G = (V, E)$ es un multigrafo, entonces*

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\#E.$$

Demostración. Simplemente observamos que cada lazo contribuye a sumar dos al grado de un vértice y cada arista que une dos vértices suma uno en el grado de cada uno de ellos. $\square$

El siguiente teorema resuelve el Problema 3.2.1.

Teorema 3.2.3. *Un multigrafo conexo G admite un circuito Euleriano si y solo si el grado de todos sus vértices es par.*

Para simplificar la prueba, probaremos antes el siguiente resulado:

Lema 3.2.4. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo. Existe un vértice x_0 que no desconecta a G, es decir, tal que el subgrafo de G inducido por $V \setminus \{x_0\}$ es conexo.*

Demostración. Probaremos por inducción en $n = \#V \geq 2$ la siguiente propiedad ligeramente más fuerte: Dado un vértice $x_0 \in V$ existe otro vértice $x_1 \in V \setminus \{x_0\}$ que no desconecta a G. Esto es claro para $n = 2$.
Supongamos que es cierto para $m < n$ y tomemos $x_0 \in V$. Si $x \in V \setminus \{x_0\}$ tenemos dos casos: si x no desconecta a G, no hay nada más que probar. Si no es así, tomamos $G_1 = (V_1, E_1)$ una componente conexa del subgrafo inducido por $V \setminus \{x\}$ que no contiene a x_0 y luego $\tilde{G}_1$ el subgrafo inducido por $V_1 \cup \{x\}$. Como $\tilde{G}_1$ es conexo y tiene menos vértices que G, por hipótesis de inducción, tenemos $x_1 \neq x$ un vértice que no desconecta a $\tilde{G}_1$. Tenemos entonces que x_1 no desconecta a G y es diferente a x_0. $\square$

Vamos ahora a la primera prueba del Teorema 3.2.3.

Demostración. ($\Rightarrow$) Asumimos que existe un circuito Euleriano y sea x un vértice de G. Notamos por E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Podemos suponer aquí que G no tiene lazos, puesto que si los tuviera esto no alteraría la existencia de un recorrido Euleriano ni la paridad de las aristas. Para cada vértice x, podemos escribir el circuito Euleriano con extremos en x:

$$(x = x_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n = x).$$

Llamemos E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Cada arista de E_x aparece exactamente una vez en el circuito. Alcanza entonces con verificar que la cantidad d earistas del circuito que inciden en x es par. Estas aristas son: e_1, e_{n-1} y por cada vez que aparezca x como vértice intermedio del circuito, un par de aristas consecutivas e_i, e_{i+1}.
Concluimos que $gr(x) = \#E_x$ es par.
($\Leftarrow$) Presentamos una prueba por inducción en la cantidad de aristas, que denotaremos por n. Se deja al lector observar que valen los primeros casos ($n = 1, 2, 3$).
Supongamos que tenemos un multigrafo conexo G con n aristas tal que todos sus vértices tienen grado par, y que todo multigrafo conexo con $m < n$ aristas que cumpla esta misma condición admite un circuito Euleriano.
Si G tiene un lazo, el multigrafo G' que resulta de quitarle a G dicho lazo admite un circuito Euleriano por hipótesis de inducción (puesto que es conexo con $n - 1$ aristas). Suponemos entonces a partir de ahora que no hay lazos en G.
Por el Lema 3.2.4, existe un vértice x_0 que no desconecta a G. Vamos a probar que existe un circuito C que empieza y termina en x_0.
Como $gr(x_0)$ es par y G es conexo y sin lazos, se tiene que existen vértices $v, w \neq x_0$ adyacentes a x_0. Como x_0 no desconecta a G, existe un camino simple c de v a w que

no pasa por x_0. Si e es una arista entre x_0 y v, y f es una arista entre x_0 y w se tiene que $C = (x_0, e, c, f, x_0)$ es un circuito que empieza y termina en x_0.

Tomemos ahora G' el multigrafo que resulta de quitarle a G todas las aristas de C y los vértices que queden aislados luego de haber quitado esas aristas. El circuito C es un circuito Euleriano sobre sí mismo, por lo que $gr_C(v)$ es par para cada vértice v en C. Como para cada vértice x en G' se tiene

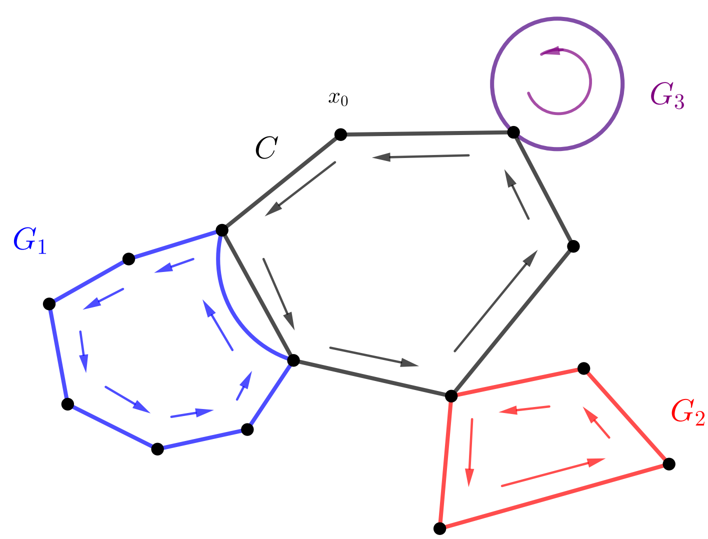
$$gr_G(x) = gr_{G'}(x) + gr_C(x),$$

tenemos que G' tiene todos sus vértices de grado par.
Sean $G_1, \ldots, G_r$ las componentes conexas de G'. Tienen necesariamente menos aristas que G, además $gr_{G_i}(v) = gr_{G'}(v)$ es par, para cada v vértice de G_i. Por hipótesis de inducción, en cada G_i hay un circuito Euleriano C_i.

Consideramos el circuito C y suponemos que tenemos índices $j_1, \ldots, j_r$ tal que x_{j_i} es el primer vértice de G_i que aparece en el circuito C. Tomamos $\mathbf{c_i}$ un circuito Euleriano en G_i que comienza y termina en x_{j_i}.
Luego, construimos en G el ciclo

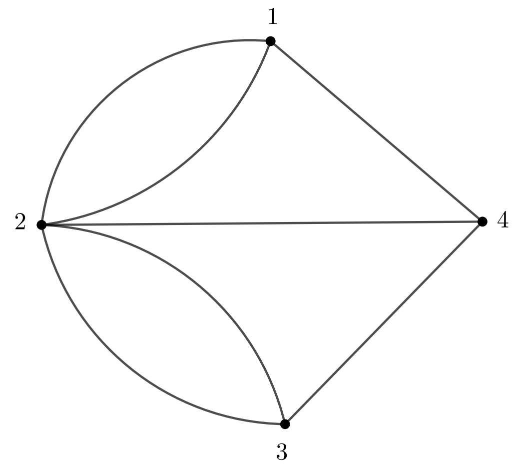
$$(x_0, e_1, \ldots, e_{j_1-1}, \mathbf{c_1}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_r-1}, \mathbf{c_r}, e_{j_r}, \ldots, x_m = x_0),$$

(como se ilustra en la figura). Este es necesariamente un circuito Euleriano pues pasa por todas las aristas de C y de los subgrafos $G_1, \ldots, G_r$ y no repite vértices.



$\square$

Utilizando el Teorema 3.2.3 podemos rápidamente concluir la solución del problema de los puentes de Königsberg.



Vemos que $gr(1) = gr(3) = gr(4) = 3$ y $gr(2) = 5$, por lo que no puede haber un circuito Euleriano. Como se ve en el siguiente corolario tampoco puede haber un recorrido Euleriano abierto.

Corolario 3.2.5. *Un multigrafo conexo G admite un recorrido Euleriano abierto si y sólo si dos de sus vértices tienen grado impar y el resto tienen grado par.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un recorrido Euleriano $(x_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, x_n)$. Luego si agregamos al grafo G una arista que une x_0 con x_n tenemos que existe un circuito Euleriano. Por el Teorema 3.2.3 se tiene que el grado de todas las aristas de este nuevo grafo es par. Por lo tanto el grado de todas los vértices del grafo original G es par, salvo para x_0 y x_n, que tienen grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que x e y son los vértices que tienen grado impar. Se considera G' el grafo que resulta de agregarle una arista a G uniendo x on y. Luego los vértices de G' tienen todos grado par, por lo que existe un circuito Euleriano en G'. Es claro entonces que existe un recorrido Euleriano en G que une x con y. $\square$

3.2.1. Caminos y ciclos Hamiltonianos

Ejemplo 3.2.6. Un grupo de personas va al cine y quiere ocupar una hilera de manera tal que cada uno esté sentado al lado de alguien a quién conoce. ¿Será esto posible? ¿Cómo puede modelarse en términos de un grafo?
Notar que si tomamos el grafo que tiene como vértices a las personas y una arista que

los une cada vez que las personas se conocen, se trata de encontrar un camino simple en el grafo, que pase por todos los vértices.

Del ejemplo anterior podemos extraer el siguiente problema: dado un grafo G, ¿existe un camino simple que pasa por todos los vértices? Un tal camino se denomina **camino Hamiltoniano**. Un camino Hamiltoniano cerrado se dice **ciclo Hamiltoniano**.
En esta sección no consideramos multigrafos, si no únicamente grafos puesto que un camino o ciclo Hamiltoniano solo puede pasar por una arista que une dos vértices dados, luego un multigrafo admite un camino o ciclo Hamiltoniano si y sólo si lo admite su subgrafo subyacente. Además, es claro que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el grafo no tiene lazos.
El problema de la existencia de caminos o ciclos Hamiltonianos en un grafo es más difícil que el de la existencia de recorridos y circuitos Eulerianos. Presentaremos algunas condiciones suficientes.

Una idea general que engloba a estas condiciones es la siguiente: cuanto más aristas haya en el grafo, más probable será que admita un camino o ciclo Hamiltoniano. Existe una condición necesaria en este sentido pues un camino Hamiltoniano en un grafo de n vértices debe pasar por $n-1$ aristas diferentes, por lo que el número de aristas totales no puede ser menor en ese caso. Esta es también una condición necesaria para que el grafo sea conexo.

Teorema 3.2.7. *Teorema de Ore, 1960*
Sea G un grafo sin lazos con n vértices.

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n-1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*

2. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano.*

Demostración. Empecemos probando la primera parte. Para eso veamos primero que G es conexo. Si no lo fuera tomamos dos componentes conexas G_1 y G_2 y dos vértices x e y, uno en cada una de estas componentes conexas. Si G_1 tiene n_1 vértices y G_2 tiene n_2 vértices, tenemos

$$gr(x) + g(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2,$$

lo que contradice la hipótesis.

Supongamos ahora que no existe un camino Hamiltoniano en G y tomemos un camino simple abierto de longitud máxima. Lo notamos

$$c = (x_1, \ldots, x_m).$$

Como estamos suponiendo que no hay caminos Hamiltonianos debe darse $m < n$.

Afirmación: Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de c.
Si x_1 o x_m es adyacente a algún vértice x fuera del camino c, entonces este puede prolongarse por alguno de los extremos, lo que contradice el hecho de que c tiene longitud máxima. Por otro lado, si x_1 y x_m son adyacentes no hay nada más que probar.
En otro caso, todos los vértices adyacentes a x_1 o x_m están en el conjunto $\{x_2, \ldots, x_{m-1}\}$.
Vamos a definir los siguientes conjuntos de índices:

$$S_1 = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_k \text{ es adyacente a } x_1\}$$

$$S_m = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_{k-1} \text{ es adyacente a } x_m\}.$$

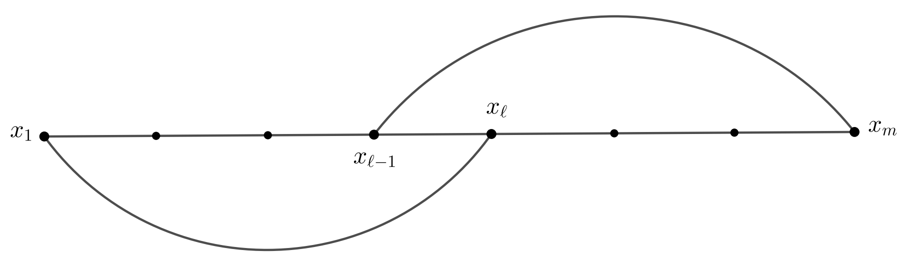
Como $gr(x_1) + gr(x_m) \geq n - 1$, entonces

$$\#S_1 + \#S_m \geq n - 3 > m - 3 = \#\{3, \ldots, m-1\},$$

lo que implica que $S_1 \cap S_m \neq \emptyset$. Tomamos $\ell \in S_1 \cap S_m$, luego x_ℓ es adyacente a x_1 y $x_{\ell-1}$ es adyacente a x_m. Obtenermos así el ciclo

$$(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_m, \ldots, x_\ell, x_1).$$

Esto prueba la afirmación.



Ahora reescribimos el ciclo de largo m obtenido en la afirmación de la forma $(y_1, \ldots, y_m, y_1)$.
Como $m < n$ y G es conexo, existe un vértice del ciclo y_k que es adyacente a un vértice x fuera del ciclo. Entonces existe un camino simple

$$(x, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

que es más largo que el camino c tomado al principio. Esto es absurdo porque este último tiene largo máximo. Concluimos entonces que $m = n$ y por lo tanto c es un camino Hamiltoniano.

Para probar la segunda parte, observemos que, por la parte anterior, el grafo G admite un camino Hamiltoniano. Repitiendo el argumento utilizado para probar la afirmación, puede construirse un ciclo que pase por los mismos vértices que este camino Hamiltoniano. Este es claramente un ciclo Hamiltoniano. $\square$

Notar que los grafos C_n sirven de contraejemplo, para $n \geq 6$, para ambas partes del Teorema anterior.

Corolario 3.2.8. *Teorema de Dirac, 195*
Si $G = (V, E)$ *es un grafo con* n *vértices tal que* $\forall v \in V, gr(v) \geq \frac{n}{2}$, *entonces* G *admite un ciclo Hamiltoniano*

3.3. Planaridad

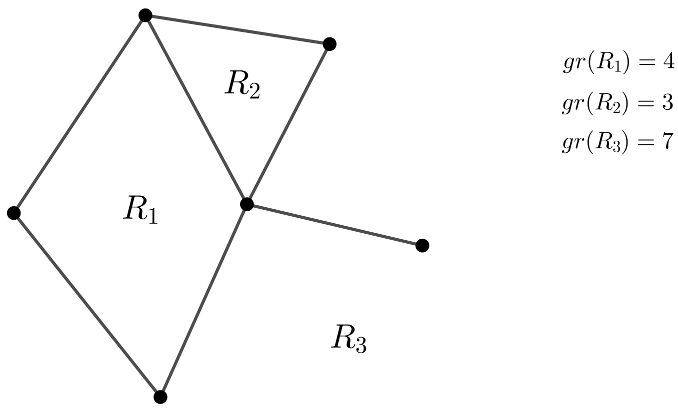
El segundo problema dado al principio del capítulo (conexión de servicios básicos) puede interpretarse de la siguiente manera: ¿Es posible dibujar en el plano el grafo bipartito $K_{3,3}$ de forma tal de no intersectar sus aristas?
Podemos preguntarnos más en general qué grafos es posible dibujar en el plano sin intersectar aristas. Vamos a dar una definición más precisa de esto.

Una **curva plana** es una función continua $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que se escribe $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ donde las funciones $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ son continuas. Diremos en este caso que α **une** $x = \alpha(0)$ con $y = \alpha(1)$.
Para un par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\mathcal{C}(x, y)$ al conjunto de curvas planas que unen x con y. El conjunto de todas las curvas planas será notado Curvas($\mathbb{R}^2$). Una **representación plana** de un grafo (o multigrafo) $G = (V, E)$ es un par de funciones inyectivas $F : V \to \mathbb{R}^2$ y $H : E \to Curvas(\mathbb{R}^2)$ tal que:

- $H(\{x, y\}) \in \mathcal{C}(F(x), F(y))$
- Si e_1 y e_2 son dos aristas distintas en E y $\alpha_1 = H(e_1)$ y $\alpha_2 = H(e_2)$, entonces $\alpha_1((0, 1)) \cap \alpha_2((0, 1)) = \emptyset$. Es decir que las imágenes de α_1 y α_2 pueden intersectarse solamente en los extremos.

Decimos entonces que el grafo G es **plano** (o **planar**) si admite una representación plana.
Cuando tengamos un grafo plano $G = (V, E)$ con una representación plana fijada (F, H), le llamaremos "vértice" tanto a los elementos de V como a los elementos de $F(V)$, y "arista" tanto a los elementos de E como a las imágenes de las curvas de $H(E)$.

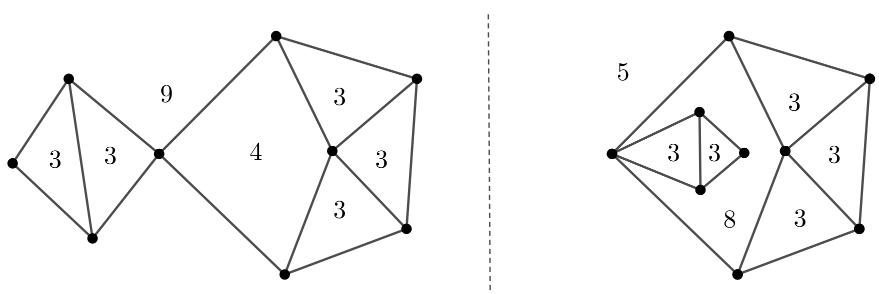
Fijado un grafo plano junto con su representación plana observamos que los puntos del plano que no son vértices y no pertenecen a ninguna arista se distribuyen en lo que llamamos **regiones**. Podemos definir el **grado** de una región como la cantidad de aristas que la delimitan.



Hay dos cosas a tener en cuenta en la definición del grado de una región:

1. Si una región está delimitada por un vértice de grado 1 que no es aislado, entonces la arista que incide en ese vértice cuenta como dos lados de la región. Esto es lo que sucede con la región no acotada R_3 de la figura anterior.

2. La definición de grado de una región no es intrínseca del grafo si no que depende de la representación plana. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo, en el que tenemos dos representaciones planas del mismo grafo. El grado de cada región es indicado en su interior.



3.3.1. Característica de Euler

Dado un grafo (o multigrafo) plano G notamos por $v(G)$ a la cantidad de vértices de G, por $e(G)$ a la cantidad de aristas de G y por $r(G)$ a la cantidad de regiones de G.

(Esta última depende a priori de la representación plana.)
El siguiente teorema de Euler relaciona las cantidades anteriores para grafos planos.

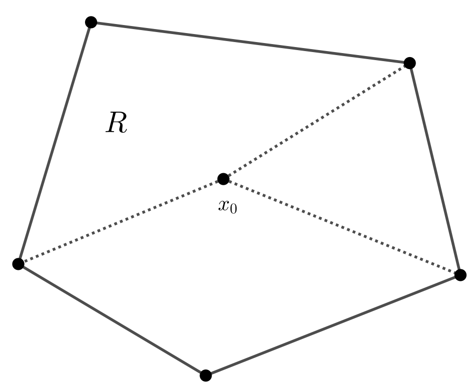
Teorema 3.3.1. *Sea G un grafo plano conexo sin lazos. Fijamos una representación en el plano de G. Entonces*

$$v(G) - e(G) + r(G) = 2. \tag{3.1}$$

Demostración. Lo haremos por inducción en el número de vértices n.
Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro. Supongamos ahora que la formula es cierta para todo grafo de n vértices y tomemos un grafo $G = (V, E)$ con $v = v(G) = n + 1$. Notamos también $e = e(G)$ y $r = r(G)$.
Tomemos $x_0 \in V$ un vértice que no desconecta el grafo y notemos G' al subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$. En este caso tenemos por hipótesis de inducción

$$2 = v(G') - e(G') + r(G') = (v - 1) - (e - gr(x_0)) + r(G'), \tag{3.2}$$

El vértice x_0 pertenece a una región R del grafo G'.



Supongamos que $gr(x_0) = k$.

- Si $k = 1$ entonces al agregar la única arista que incide en x_0 la región R no se divide, luego $r(G') = r$.
- Si $k > 1$, cada arista que incide en x_0 es borde de dos regiones diferentes de G y a la vez cada región de G tiene en su borde dos aristas diferentes que inciden en x_0, esto implica que R se divide en k regiones. Es decir que $r = r' + k - 1$. (Esto no cambia si R es la región no acotada).

Observar que en ambos casos la ecuación (3.2) implica que $v - e + r = 2$, luego por el principio de inducción queda demostrado el teorema. $\square$

Observación 3.3.2.

1. El teorema anterior muestra que la cantidad de regiones no depende de la representación plana si no sólo del grafo G.
2. Si permitimos lazos la fórmula (3.1) sigue siendo cierta. También es cierta para multigrafos (se deja como ejercicio).

Corolario 3.3.3. *Sea G un grafo plano, conexo y sin lazos con $v \geq 3$ (notamos $v = v(G), e = e(G) y r = r(G)$). Se tiene*

(1) $3r \leq 2e$

(2) $6 \leq 3v - e$

Demostración. El grado de cada región es al menos tres (porque G no es un multigrafo y no tiene lazos). Observamos que cada arista es borde o bien de dos regiones o bien es dos veces borde de una región, luego

$$2e = \sum_{R \text{ región}} gr(R) \geq 3r.$$

Esto prueba (1). Por el Teorema 3.3.1

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}a = v - \frac{1}{3}e,$$

lo que implica (2). $\square$

3.3.2. Grafos no planos

En este punto volvemos al segundo de los problemas presentados al principio del capítulo. La siguiente proposición responde a la pregunta planteada.

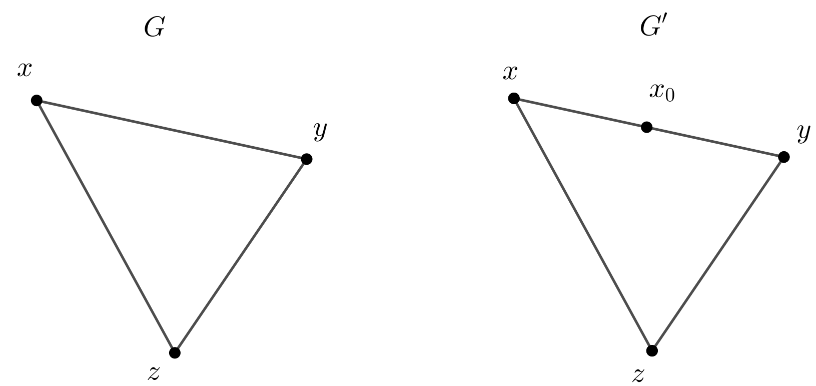
Proposición 3.3.4. *Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.*

Demostración. Para ver que K_5 no es plano, alcanza con ver que si lo fuera, tendríamos $3v - e = 15 - 10 = 5$, lo que contradice 3.3.3.(2).

Para ver que $K_{3,3}$ no es plano, observemos que, si lo fuera, las regiones tendrían grado par (porque los ciclos de un grafo bipartito son de largo par) y por lo tanto mayor o igual a 4. Además, usando la característica de Euler, se tiene que $r = 5$.
La suma de los grados de las regiones sería entonces mayor o igual a 20, y tendríamos $2e \leq 20$ mientras que $e = 9$. $\square$

En realidad la proposición anterior es parte de un resultado más general que enunciaremos sin demostrar. Para esto necesitamos hacer primero algunas definiciones.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es una **subdivisión elemental** de G si $V' = V \cup \{x_0\}$ y existe un par de vértices $x, y \in V$ tal que $E' = (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, x_0\}, \{x_0, y\}\}$. Dicho de otro modo, G' se obtiene al dividir en dos una arista de G poniendo en esta un nevo vértice. De forma similar puede hacerse la definición para multigrafos.

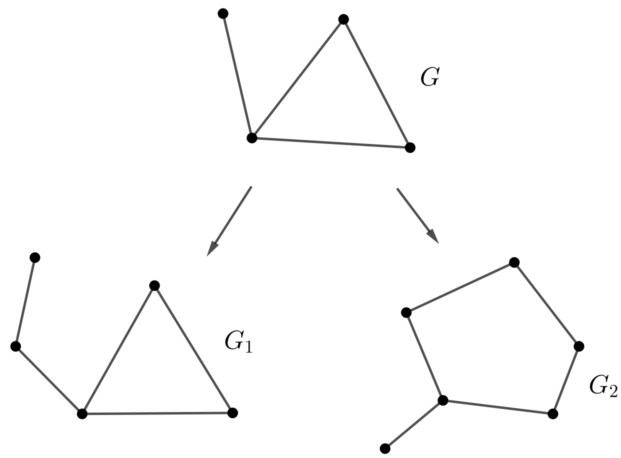


Un grafo G' es una **subdivisión** de otro grafo G si existe una secuencia finita de grafos

$$G_0 = G, G_1, \ldots, G_{k-1}, G_k = G'$$

tal que G_i es una subdivisión elemental de G_{i-1} para todo $i = 1, \ldots, k$.

Diremos que G_1 y G_2 son grafos (o multigrafos) **homeomorfos** si son subdivisiones de un mismo grafo G.



Observación 3.3.5.
- La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o multigrafos $\mathcal{G}$.
- La condición de planaridad se preserva por homeomorfismo, es decir que si G_1 y G_2 son homeomorfos, entonces G_1 es plano si y sólo si G_2 lo es.
- Todo multigrafo es homeomorfo a un grafo. Más precisamente todo multigrafo tiene una subdivisión que es un grafo. Luego el problema de la planaridad de multigrafos se reduce al caso de los grafos.

Habiendo definido estas nociones, estamos listos para enunciar el siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en la literatura, pero obviamos acá.

Teorema 3.3.6 (Kuratowski)**.** *Un grafo G es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.*

Bibliografía

[G] Ralph Grimaldi; *Matemática discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones.*

[H] Paul Halmos; *Teoría intuitiva de conjuntos.*

[L] Chung Laung Liu; *Introduction to combinatorial mathematics.*

[W] Dougles West; *Introduction to graph theory.*