Facultad de Ciencias. Centro de Matemática.
Matemática Discreta. 2018

Prueba Globalizadora.

1. Probar por inducción completa que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1$.

2. Lo que sigue es una prueba combinatoria de la fórmula del ejercicio anterior. Se consideran los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   a) Se definen los conjuntos

   $$S = \{f : A \to B | f(a) = f(b) < f(c)\},$$
   $$S_i = \{f : A \to B | f \in S \text{ y } f(c) = i\}, \text{ para cada } i \in \{2, 3, ..., n\}$$

      1) Probar que $\{S_i \mid i \geq 2\}$ es una partición de S.
      2) Calcular $|S|$ y $|S_i|$, para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$.
      3) Deducir una expresión algebraica de $\sum_{i=2}^{n}(i-1)$ en función de n.

   b) Idem que a) para los conjuntos $T = \{f : A \to B | f(a) \leq f(b) \leq f(c)\}$ y $T_i = \{f \in T \mid f(c) = i\}$, $i \geq 1$ y la expresión algebraica $\sum_{i=1}^{n}(i^2 + i)$.

   c) Usar las partes anteriores para probar la fórmula del ejercicio 1.

3. Se considera el grafo $K_{n,m}$ cuyo conjunto de vértices es $V = \{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$ y hay una arista entre x_i e y_j, si $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ y estas son las únicas aristas.

   a) Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito en V_1 y V_2 si el conjunto de vértices V puede dividirse en dos conjuntos V_1 y V_2, de modo que cada arista de E conecta vértices de V_1 solamente con vértices de V_2.
   Probar que son equivalentes:

      1) G es bipartito en ciertos V_1 y V_2,
      2) existen naturales n, m tales que G es subgrafo de $K_{n,m}$,
      3) G es 2-coloreable.

   b) Probar que si un grafo bipartito en V_1 y V_2 es Hamiltoniano (es decir, admite un ciclo Hamiltoniano), entonces V_1 y V_2 tienen el mismo cardinal.