Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2021

Práctico 2

1. Describir todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_8$ y del *grupo de Klein* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ¿Vale $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_4$?

2. Sean H y K subgrupos de un grupo G. Probar que $HK = \{hk : \ h \in H, \ k \in K\}$ es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$. Probar que $KH \subset HK$ implica $KH = HK$.

3. Sea $G \neq \{1\}$ un grupo que no admite subgrupos propios. Probar que G es cíclico finito de orden primo.

4. Probar que si un grupo G contiene dos elementos g, f de orden finito, que conmutan entre sí y tales que sus órdenes son primos entre sí, entonces $\langle g, f \rangle$ es cíclico.

5.
   a) Sean G, F grupos y $G \times F$ su producto directo. Consideramos $G_0 = \{(g, 1) \in G \times F : \ g \in G\}$ y $F_0 = \{(1, f) \in G \times F : \ f \in F\}$. Probar que los elementos de G_0 conmutan con los de F_0 y valen
   $$G \simeq G_0 < G \times F; \quad F \simeq F_0 < G \times F; \quad G_0 \cap F_0 = \{(1,1)\}; \quad G \times F = G_0F_0.$$
   b) Sea G un grupo y H, K subgrupos de G tales que $hk = kh$, para todo $h \in H$, $k \in K$, $H \cap K = \{1\}$ y $G = HK$. Probar que $\varphi : H \times K \to G$ definido por $\varphi(h, k) = hk$ es un isomorfismo.

6. Sean $G_1, \dots, G_m$ grupos cíclicos finitos cuyos órdenes son primos dos a dos. Probar que el producto directo $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ es cíclico. *Sugerencia:* probarlo para $m = 2$ y luego aplicar inducción en m.

7. Sea G un grupo y consideramos $\varphi : G \to G$ definido por $\varphi(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$. Probar que $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$ si y solo si G es abeliano.

8. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico. Probar que si $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$, entonces $\varphi(g)$ es un generador de G. Recíprocamente, probar que si f es otro generador de G, entonces existe $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$ tal que $\varphi(g) = f$.

9. Probar: $\operatorname{Aut} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$; $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n^\times, \ n \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}_n^\times$ es el grupo multiplicativo de los invertibles de $\mathbb{Z}_n$); $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_4$; $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$; $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

10.
    a) Sean p, q números primos. Probar que todo morfismo de grupos $\tau : \mathbb{Z}_p \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_q)$, $\overline{k} \mapsto \tau_{\overline{k}}$, es de la forma $\tau_{\overline{k}}(\overline{n}) = \overline{r}^k \overline{n}, \ \forall k, n \in \mathbb{Z}$, siendo $r \in \mathbb{Z}$ tal que $r^p \equiv 1 \mod q$.
    b) Si τ y r son como en la parte a), probar que τ es el morfismo trivial si y solo si $r \equiv 1 \mod q$.

11. Sean H y K subgrupos de un grupo G.
    a) Probar que tiene sentido definir $\varphi : H/H \cap K \to G/K$ mediante $\varphi\big(h(H \cap K)\big) = hK, \forall h \in H$. Deducir que si $[G : K] < \infty$, entonces $[H : H \cap K] < \infty$ y $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.
    b) Si $[G : K] < \infty$, probar $[H : H \cap K] = [G : K]$ si y solo si $G = HK$.

12. Sean H y K subgrupos de índice finito de G. Probar:
    a) El índice de $H \cap K$ en G es finito y $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$.
    b) Vale $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$ si y solo si $G = HK$.
    c) Si $[G : H]$ y $[G : K]$ son primos entre sí, entonces $G = HK$.

13. Sea G un grupo de orden 4. Probar que si G no es cíclico, entonces G es abeliano y existen H, K subgrupos de orden 2 tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{1\}$. Concluir $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ o $G \simeq \mathbb{Z}_4$.

14. Determinar los retículos de subgrupos de Q y de D_4. *Sug.:* usar Lagrange y el ej. 10 del Pr. 1.

15. Sean $\mathcal{M}$ el grupo de los movimientos del plano y $\mathcal{M}_+$ el subgrupo de los movimientos directos. Probar $[\mathcal{M} : \mathcal{M}_+] = 2$. Deducir que si $G < \mathcal{M}$, entonces $G \subset \mathcal{M}_+$ o $[G : G_+] = 2$, siendo $G_+ = G \cap \mathcal{M}_+$.