# Conjuntos

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) a partir de las cuales se prueban todos los teoremas. En esta parte del curso trabajaremos de manera un poco informal y no especificaremos los axiomas de la teoría. Así por ejemplo mostraremos construcciones de ciertos conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría.

## 0.1. Primeras definiciones

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos que poseen una propiedad en común. A estos objetos los llamaremos **elementos**. Escribiremos $x \in X$ para indicar que $x$ pertenece a $X$.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si $A$ y $B$ son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si $A$ y $B$ tienen los mismos elementos. Esto nos dice que en principio para definir un conjunto debemos decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto enumerándolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad determinada. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión**.

**Ejemplos 0.1.1.** Definimos el mismo conjunto $A$ por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: $A$ es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o

- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto $A$ está **contenido** o **incluido** en otro conjunto $B$ si todos los elementos de $A$ son elementos de $B$. También podemos decir en este caso que $A$ es un **subconjunto** de $B$ o que $B$ **contiene** a $A$ y lo escribimos $A \subset B$. Observar que $A \subset B$ y $B \subset A$ implica que $A = B$. Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

También escribiremos $A \not\subset B$ para indicar que $A$ no está incluido en $B$, y $A \subsetneq B$ para indicar que $A$ está incluido en $B$ pero estos conjuntos no son iguales.

El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es el conjunto que no tiene elementos. Observar que si $X$ es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset X$.

### 0.1.1. Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que $A$ y $B$ son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto $C$ contiene a $A$ y a $B$, entonces $A \cup B \subset C$.

**Proposición 0.1.2.** *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si $A, B$ y $C$ son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

*Demostración.* Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.

De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3). $\square$

La Proposición 0.1.2 permite dar una definición para la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$. Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} := \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C}.$$

Si $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos, una notación usual para $\bigcup \mathcal{A}$ es

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

**Ejemplo 0.1.3.** Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos, luego

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

(el conjunto que contiene a todos los números naturales excepto el 1).

## 0.1.2. Intersección y resta de conjuntos

Si $A$ y $B$ son conjuntos, definimos:

- su **intersección**: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$,
- y su **resta**: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que $A$ y $B$ son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$; sin embargo, la resta no lo es.

**Ejemplo 0.1.4.** Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, \cdots\}$$

(el conjunto de los pares que no son múltiplos de 3)

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección se define por

$$\bigcap \mathcal{C} := \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos $A_p$ como en el Ejemplo 0.1.3, tenemos

$$\bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Si $A \subset X$, entonces definimos el **complemento** de $A$ en $X$ como el conjunto $A^c = X \setminus A$. Observar que en la notación $A^c$ no se explicita el conjunto $X$. Cuando se habla de complemento, el conjunto $X$ se piensa como el *universo* en el que están contenidos los conjuntos y se deduce del contexto. Si esto no es así, entonces es mejor mantener la notación $X \setminus A$ que explicita el conjunto $X$.

**Ejercicio 0.1.5.** Probar, para $A, B$ subconjuntos de $X$:

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$ (en ambos casos el *universo* implícito es $X$).

### 0.1.3. Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos $A$ y $B$ se define como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\},$$

donde $(a, b)$ es el par ordenado de los elementos $a$ y $b$. Observar que, al tratarse de pares ordenados, el producto cartesiano no es conmutativo.

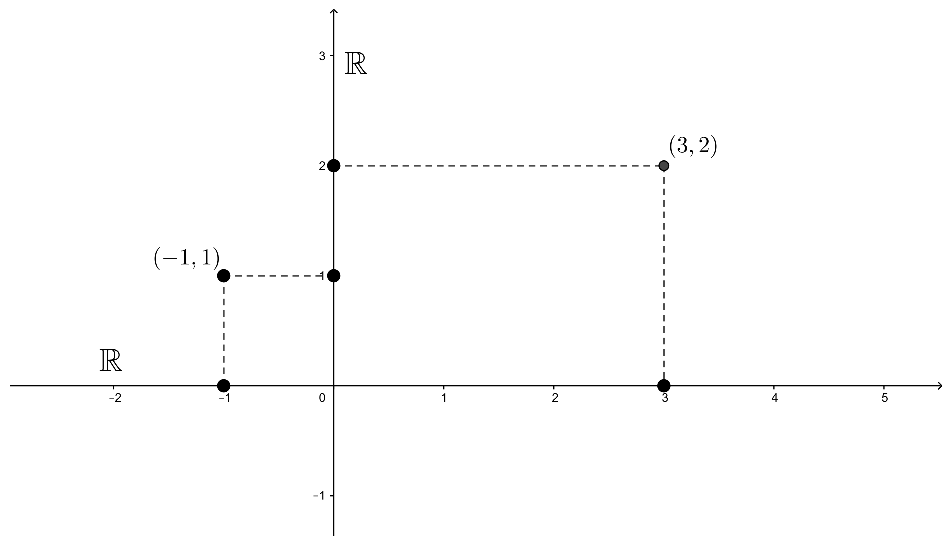
**Ejemplos 0.1.6.** 1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

   $$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

   . Determinar $B \times A$.

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.




Definimos la **unión disjunta** de dos conjuntos $A$ y $B$ por

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

De esta forma $A$ se identifica con el subconjunto $A \times \{0\}$ y $B$ con el subconjunto $B \times \{1\}$.

**Ejemplos 0.1.7.** 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, entonces

$$A \sqcup B = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}.$$

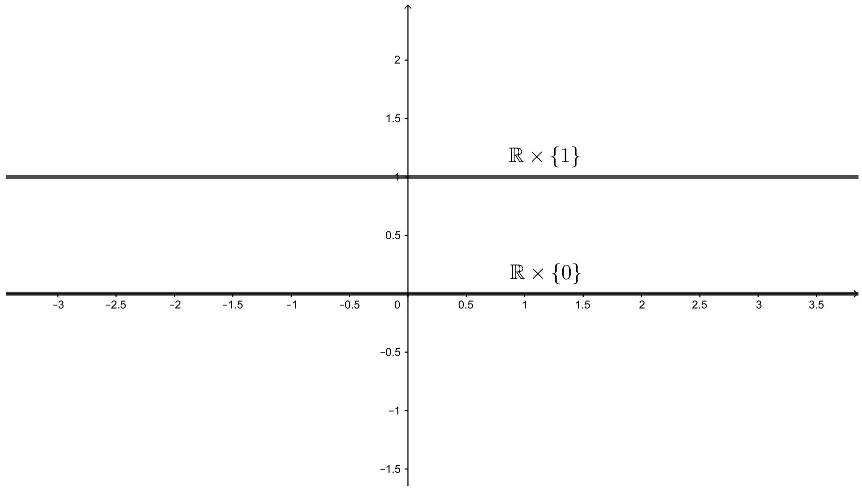
Este puede verse como el conjunto $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Definimos el **conjunto de los números enteros** por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Identificamos aquí el conjunto de los naturales con los elementos de la forma (n,1), y los números negativos con los pares de la forma $(n, 0)$. Usualmente se nota $n = (n, 1)$ y $-n = (n, 0)$.

3. La unión disjunta de la recta real con sí misma puede verse como la unión de dos rectas paralelas en el plano:




### 0.1.4. Conjunto de partes

El **conjunto de partes** o **conjunto potencia** de un conjunto $A$ es

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de $A$.

**Ejemplos 0.1.8.** 1. El conjunto de partes de $A = \{1, 2\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

2. El conjunto de partes del conjunto vacío es

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$