Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2021

Práctico 1: Conjuntos

1. Negar la siguiente sentencia (no vale poner un *No* delante):

   Todos los caminos conducen a Roma.

   Proponer otros ejemplos y escribir su negación.

2. Dar el recíproco y contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones:
   - Si vas a Facultad en el 370 entonces llegás en hora a clase.
   - Si un número termina en 0, entonces es par.

3. *a*) Determinar los siguientes conjuntos por extensión.
   - el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.
   - el conjunto formado por las raíces cuadradas naturales de los primeros 50 números naturales.

   b) Determine los siguientes conjuntos por extensión.
   - $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   - $\{1 + (1/n) \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
   - $\{n + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

   c) Determinar los siguientes conjuntos por comprensión:
   - $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.
   - $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

   a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\{1, 2, 2, 3\}$ c) $\{3, 2, 1\}$ d) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e) $\{\{1, 2, 3\}\}$
   f) $\{1, \{2, 3\}\}$ g) $\{1, 2, 2, 3\}$ h) $\{3, 2\} \cup \{1, 2\}$ i) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \cap \{1, 2, 3\}$

5. Considerando los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$, indique cuáles son iguales entre sí.

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}; \quad B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}; \quad C = \{2m - 3 \mid m \in \mathbb{Z}\};$$
$$D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\}; \quad E = \{3m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}; \quad F = \{3m - 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

6. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas.

   a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subseteq A$ d) $\{\{1\}\} \subseteq A$ e) $\{2\} \in A$
   f) $\{2\} \subseteq A$ g) $\{\{2\}\} \subseteq A$ h) $\{\{2\}\} \subsetneq A$

7. Sean A y B dos conjuntos incluídos en un conjunto X. Dar una expresión cuantificada y una en lenguaje natural para las siguientes proposiciones, como se muestra en el siguiente ejemplo:
   La proposición $A \subseteq B$ en lenguaje natural se expresa:
   "todo elemento de A es elemento de B"
   y, en una expresión cuantificada, $\forall x : x \in A \to x \in B$.

   a) $A^C \subseteq B$ b) $A = B$ c) $A^C = B$ d) $A \nsubseteq B$

8. Probar que:

   a) Si $A, B \subset X$, entonces $A \setminus B = A \cap B^c$.

   b) Si $A \subset B \subset X$, entonces $B^c \subset A^c$ (tanto A^c como B^c son los complementos en X).

9. La *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B se define mediante

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

   Probar que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

10. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 7\}$, $B = \{2n : n \in A\}$, $C = \{3n : n \in (A \cap B)\}$ $D = \{1, 2, 3\}$
    Calcular:

    a) $A \cup B$ b) $A \cup D$ c) $A \cap C$ d) $A \setminus B$ e) $A \setminus D$ f) $D \setminus A$ g) $C \setminus A$
    h) $A \triangle D$ i) $A \triangle (B \cup D)$ j) $(A \cup B) \triangle (A \cap B)$

11. ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos A y B para que se cumpla $A \cup B = A \triangle B$? Enunciar la respuesta anterior en forma de teorema y probarlo. ¿Se cumple el recíproco?

12. Leyes de De Morgan

    a) Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto C. Expresar $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$ en términos de A^c y B^c.

    b) Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

13. Sean A, B y C conjuntos. Expresar $A \cap (B \cup C)$ en términos de $A \cap B$ y $A \cap C$. ¿Se puede decir algo similar sobre $A \cup (B \cap C)$ y las uniones $A \cup B$ y $A \cup C$? Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

14. Sean $A = \{*\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. Describir los siguientes conjuntos:

    a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ b) $\mathcal{P}(A)$ c) $\mathcal{P}(B)$ d) $B \times C$ e) $\mathbb{N} \times B$