Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2021

Práctico 3

1. Sea X un G-conjunto e Y un subconjunto de X. Probar que Y es G-estable si y sólo si Y es unión de órbitas de X.

2. Sean H y K subgrupos finitos de un mismo grupo G. Consideramos el conjunto HK.

   a) Probar que $(h,k)\cdot(h_0k_0) = hh_0k_0k^{-1}$ define una acción transitiva del grupo $H \times K$ en HK.

   b) Deducir $|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|}$.

3. Si un grupo G actúa en un conjunto X, ¿qué relación hay entre G_x y G_y cuando x e y están en la misma órbita?

4. Probar que el grupo aditivo $\mathbb{R}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ definiendo $r\cdot(x,y) = (x+r,y)$. Investigar si esta acción es fiel y dibujar las órbitas de la acción.

5. El grupo lineal $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actúa en el conjunto de las matrices $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ mediante $A\cdot X = AXA^{-1}$.

   a) Investigar si esta acción es fiel.

   b) Probar que los puntos fijos de esta acción son las matrices escalares.

6. Probar que el grupo $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : \ b \in \mathbb{R} \right\}$ actúa por conjugación (como en el ejercicio 5) en las matrices triangulares $T = \{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) : \ x,y,z \in \mathbb{R} \}$. Observar que T se puede identificar con $\mathbb{R}^3$. Estudiar las órbitas de la acción de U en T y dibujarlas en $\mathbb{R}^3$. Dar un conjunto de representantes de las órbitas.

7. Sea P_n un polígono regular. El grupo diedral $D_n = \mathrm{Sim}(P_n)$ actúa en P_n mediante $\varphi\cdot p = \varphi(p)$. Notar que esta acción es fiel (¿por qué?). Considerando la acción de D_3 en los vértices (numerados) del triángulo equilátero, probar que vale $D_3 \simeq \mathcal{S}_3$. ¿Vale $D_n \simeq \mathcal{S}_n$, si $n > 3$?

8. Consideremos el tetraedro regular $\mathcal{T}$. Sean c su centro (el punto que equidista de los vértices) y G_+ el grupo de simetrías <u>directas</u> de $\mathcal{T}$. Notar que G_+ actúa naturalmente en los vértices y caras de $\mathcal{T}$.

   a) Probar que G_+ es finito. *Sugerencia:* considerar la acción de G_+ en los vértices de $\mathcal{T}$. Notar que un movimiento queda determinado conociendo la imagen de cuatro puntos no coplanares.

   b) Probar que si $\varphi \in G_+$, entonces $\varphi(c) = c$; luego φ es una rotación cuyo eje contiene a c. *Sugerencia:* usar que los movimientos directos del espacio son las rotaciones y las traslaciones.

   c) Notar que G_+ actúa naturalmente en el conjunto de las caras de $\mathcal{T}$. Probar que esta acción es transitiva y que el estabilizador de una cara es el grupo cíclico C_3. Concluir que el orden de G_+ es 12 y describir sus elementos.

   d) Razonando análogamente, determinar el orden de $\mathrm{Sim}_+(\mathcal{C})$ el grupo de simetrías directas del cubo $\mathcal{C}$. Notando que $\mathrm{Sim}_+(\mathcal{C})$ actúa en el conjunto de vértices opuestos de $\mathcal{C}$, deducir $\mathrm{Sim}_+(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{S}_4$.

   e) Mostrar que la acción de $\mathrm{Sim}_+(\mathcal{C})$ en el conjunto de caras opuestas de $\mathcal{C}$ no es fiel. Hallar el núcleo del morfismo asociado a esa acción. ¿Qué grupo se obtuvo?

   f) Notar que el tetraedro y el cubo tienen planos de simetría, luego ambos admiten simetrías indirectas. Usando el último ejercicio del práctico 2, deducir los órdenes de $\mathrm{Sim}(\mathcal{T})$ y $\mathrm{Sim}(\mathcal{C})$.

Nota. Esta técnica sirve para calcular el orden del grupo de simetrías de cualquier poliedro regular.