Funciones

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Fijemos dos conjuntos A y B.
Se llama **relación** de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una **función** de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que cumple que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** de f al conjunto B.

Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A en B, y notamos B^A al conjunto de todas las funciones de A en B.

Ejemplos 0.0.1.

1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía.
2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en X por
$$id_X : X \to X,\ id_X(x) = x \ \ \forall x \in X.$$
3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por
$$i : A \to B,\ i(a) = a\forall \ \ a \in A.$$
Si $A = B$, entonces i no es otra cosa que la identidad.
4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es
$$f : A \to B,\ f(a) = b_0 \ \ \forall a \in A.$$
5. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, llamamos **restricción de** f al subconjunto A, a la función $f_{|A} : A \to Y$ definida por $f_{|A}(x) = f(x)$.

0.0.1. Conjunto de imágenes y preimágenes

Tomemos $f : A \to B$ una función. Si $f(a) = b$ decimos que b es la **imagen** de a por f y que a es una **preimagen** de b por f. Además, si $X \subseteq A, Y \subseteq B$, decimos que

- el conjunto **imagen** de X por f es $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset B$.
- el conjunto **preimagen** de Y por f es $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$.

También diremos que la **imagen** o el **recorrido** de la función f es el conjunto $f(X)$.

Ejercicio 0.0.2. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

0.0.2. Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x')$ se da sólo si $x = x'$.

Ejemplos 0.0.3.

1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.
2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.
3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.
4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva pues $f(-1) = f(1)$.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplos 0.0.4.

1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio 0.0.5. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y sólo si f es inyectiva.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

0.0.3. Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su **composición** es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

Proposición 0.0.6. *1. La composición de funciones es asociativa.*

2. La composición de funciones no es conmutativa.

3. Dada $f : A \to B$, se tiene $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$.

Demostración. Se hizo en clase y queda como ejercicio para el lector (ver Ejercicio 5 del Repartido 2). □

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to X$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**.

Proposición 0.0.7. *Si una función f tiene inversa, entonces esta es única y se nota f^{-1}.*

Demostración. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

□

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones biyectivas. Antes de demostrarla, presentamos un resultado previo e importante.

Lema 0.0.8. *Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones.*

1. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

2. Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Demostración. 1. Supongamos que a, a' son elementos de A tales que $f(a) = f(a')$. Queremos ver que $a = a'$.
Aplicando g a la igualdad de arriba, se tiene

$$g(f(a)) = g(f(a')),$$

que equivale a $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. hora bien, como $g \circ f$ es inyectiva, se deduce $a = a'$.

2. Sea $A \in A$, buscamos $b \in A$ tal que $g(b) = a$. Como $g \circ f : A \to A$ es sobreyectiva, existe $a' \in A$ tal que $(g \circ f)(a') = a$. Entonces $g(f(a')) = a$ y obtenemos que $f(a')$ es un elemento como el b que buscábamos.

□

Proposición 0.0.9. *Una función es invertible si y sólo si es biyectiva.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva. Como $g \circ f = id_A$ y id_A es inyectiva, se deduce de la primera parte del Lema anterior, que f es inyectiva.
Por otra parte, como $f \circ g = id_B$ y id_B es sobreyectiva, se deduce de la segunda parte del Lema anterior, que f es sobreyectiva.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f. □