Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2021

Práctico 2: Funciones

1. Averiguar si cada una de las siguientes relaciones de A en B es una función. Si lo es, determinar su imagen.

   a) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, y = x^2+7\}$, $A=\mathbb{R}$ y $B=\mathbb{R}$.

   b) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, y^2 = x\}$, $A=\mathbb{R}$ y $B=\mathbb{R}$.

   c) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, y = 3x+1\}$, $A=\mathbb{R}$ y $B=\mathbb{R}$.

   d) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}, x^2+y^2 = 1\}$, $A=\mathbb{Q}$ y $B=\mathbb{Q}$.

2. La regla de asignación $f(x) = 1/(x^2-2)$, ¿define una función $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$? ¿y una función $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$?

3. Determinar si la función $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ es inyectiva, sobreyectiva y hallar su imagen en cada uno de los siguientes casos.

   a) $f(x) = x+7$ b) $f(x) = 2x-3$ c) $f(x) = -x+5$ d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = x^2+x$ f) $f(x) = x^3$

4. Repita la tarea anterior con $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5. Se consideran $f: A \to B$ una función, $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos de A, $\{B_i \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos de B.

   a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

   b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?

   c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

   d) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

6. Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ dos funciones. Se define la función compuesta $g \circ f : A \to C$ mediante $(g\circ f)(a) = g(f(a))$. A la operación $\circ$ se le llama *composición de funciones.*

   a) Probar que $\circ$ es asociativa.

   b) Probar que $\circ$ no es conmutativa (para eso suponer $A=B=C$).

   c) Definimos la función identidad $id_X : X \to X$ mediante $id_X(x) = x$. Enunciar igualdades que ilustran que estas funciones sirven de neutros para la composición.

7. Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Probar que

   a) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

   b) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

   c) si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

8. Una función $f : A \to B$ es *invertible a izquierda* si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por otro lado decimos que f es *invertible a derecha* si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Probar que una función

   a) es invertible a izquierda si y sólo si es inyectiva;

   b) es invertible a derecha si y sólo si es sobreyectiva;

9. Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Probar que si $f : A \to B$ es tal que tiene una única inversa a izquierda (o a derecha), entonces f es invertible.

10. Dar ejemplos de funciones invertibles de un solo lado, verificando que la "inversa de un lado"no lo sea del otro. Verificar además que no necesariamente hay una única inversa de un lado.

11. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

    a) $A \subset f^{-1}(f(A))$. Además se da la igualdad $\forall A \subset X$ si y sólo si f es inyectiva.

    b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Además se da la igualdad $\forall B \subset Y$ si y sólo si f es sobreyectiva.

12. Probar que existe una función biyectiva entre $\mathcal{P}(X)$ y $\{0, 1\}^X$.