

Imágenes por Resonancia Magnética 2021

Práctico II – Sistemas Rotativos y Resonancia

Ejercicio 1

Teniendo en cuenta la ecuación de Bloch simplificada: $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma\vec{\mu} \times \vec{B}$

a) Muestre que para un campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{z}$ la ecuación mencionada se puede descomponer en tres componentes:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_x}{dt} &= \gamma\mu_y B_0 = \omega_0\mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} &= -\gamma\mu_x B_0 = -\omega_0\mu_x \quad \text{con} \quad \omega_0 \equiv \gamma B_0 \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

b) Tomando las derivadas de las dos primeras ecuaciones, muestre que se pueden desacoplar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mu_x}{dt^2} &= -\omega_0^2\mu_x \\ \frac{d^2\mu_y}{dt^2} &= -\omega_0^2\mu_y\end{aligned} \quad \text{que admiten soluciones de la forma} \quad C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

c) Reemplazando las formas generales de las soluciones mencionadas en el inciso b) en las ecuaciones del inciso a), muestre que se encuentra:

$$\begin{aligned}\mu_x(t) &= \mu_x(0) \cos \omega_0 t + \mu_y(0) \sin \omega_0 t \\ \mu_y(t) &= \mu_y(0) \cos \omega_0 t - \mu_x(0) \sin \omega_0 t \\ \mu_z(t) &= \mu_z(0)\end{aligned}$$

Ejercicio 2

En muchos experimentos en RM, es necesario “girar” un spin, que se encuentra inicialmente alineado según el eje z, hacia el plano x-y, usando un pulso de radiofrecuencia apropiado. Éste se llama pulso de “90°” o “ $\pi/2$ ”. Si el intervalo de emisión de dicho pulso es $1.0ms$, calcule la magnitud del campo B_1 en μT que se necesita para:

- El spin de un protón.
- El spin de un electrón.
- ¿Cuántos ciclos de precesión de Larmor tienen lugar en el sistema de referencia del laboratorio, para un campo $B_0=1.0T$, durante la rotación del spin de la parte a)?
- Grafique la trayectoria de la orientación del momento magnético en el referencial del laboratorio.

Ejercicio 3

Sea un campo uniforme dirigido hacia el eje z positivo. Una partícula clásica con spin, radio giromagnético positivo γ y momento magnético μ , tiene su spin inicialmente alineado con el campo magnético. Un campo magnético polarizado circularmente dirigido en la dirección \hat{y}' , y tiene una amplitud que depende del tiempo $B_{1y'}(t)$ se aplica a la frecuencia de resonancia empezando al tiempo $t = 0$.

a) Proporcione las expresiones para las tres componentes del vector momento magnético en el referencial en rotación para tiempos $t > 0$. Su respuesta debería estar en términos de una integral definida.

b) Muestre que las respuestas de a) satisfacen la ecuación $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma\vec{\mu} \times \vec{B}$ para $\vec{B} \rightarrow B_{1y'}\hat{y}'$

c) Encuentre la generalización de las ecuaciones de la parte b) del ejercicio 1 necesarias para el caso de dependencia temporal.

Ejercicio 4

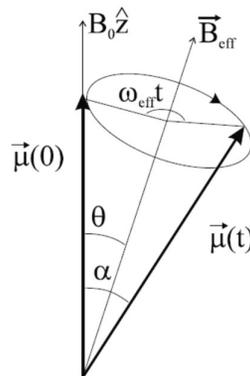
Muestre que el versor que rota con un campo magnético polarizado circularmente hacia la derecha está dado por: $\hat{x}^{right} = \hat{x}' \cos 2\omega t + \hat{y}' \sin 2\omega t$ ¿Cuál es su promedio temporal?

Ejercicio 5:

Sea $\alpha(t)$ el ángulo entre $\vec{\mu}(0)$ y $\vec{\mu}(t)$ como se muestra en la figura. Asuma que $\vec{\mu}(0)$ es paralelo a la dirección \hat{z} . Muestre que $\cos \alpha(t)$, que representa la cantidad de momento magnético, o spin, que queda en la dirección \hat{z} , se da en términos de θ y ω_{eff} según:

$$\cos \alpha(t) = \cos^2 \theta + \cos \omega_{eff} t \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\omega_{eff} t}{2}$$

Pista: descomponga $\vec{\mu}(t)$ en sus componentes paralela y perpendicular a \vec{B}_{eff} . Proyecte entonces éstas componentes según el eje z.



Ejercicio 6

a) Evalúe la radiación emitida por un momento magnético en precesión alrededor de un eje fijo (asuma un cierto ángulo inicial).

b) Calcule la distribución angular y la potencia total emitida por ciclo.

c) ¿Qué condiciones de los parámetros del problema habría que considerar para poder utilizar la aproximación de Larmor no relativista?

d) Teniendo en cuenta el caso de un protón precesando en un campo externo de 3T, calcule el tiempo necesario para emitir una energía de $\gamma B \hbar / 2\pi$. Compare éste tiempo con T1 y T2 en dicha situación, y asumiendo un ángulo de giro ("flip angle") inicial de 90°.