Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2021

Práctico 3: Relaciones: generalidades y relaciones de equivalencia

1. Describir por extensión la relación $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} | \ x^2 + y^2 = 4\}$. Representar en el plano la relación $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \ x^2 + y^2 = 4\}$.

2. Un relación en X se dice irreflexiva si para todo $x \in X$ se tiene $(x, x) \notin R$.

    a) Observar que irreflexiva implica no reflexiva, pero que el recí proco no es cierto.
    b) Caracterizar la irreflexividad comparando la relación R con Id_X.
    c) Probar que toda relación asimétrica es irreflexiva.

3. Investigar si las siguientes relaciones son o no reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, antisimétricas, transitivas.

    - sobre $\mathbb{N}$: ser la mitad de.
    - sobre el conjunto de las rectas de un plano: ser perpendicular a, ser paralela a.
    - para un universo $\mathcal{U}$ y un subconjunto fijo X de $\mathcal{U}$, definimos $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que si $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$ entonces $A\mathcal{R}B$ si $A \cap X = B \cap X$.
    - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ es par
    - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x + y$ es par.
    - idem anteriores cambiando par por impar.
    - sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $a \leq c$.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

4. Averiguar cuáles relaciones del ejercicio 3 son de equivalencia.

5. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

    a) Hallar $\sim$ una relación de equivalencia con la menor cantidad de elementos posible que contiene a los pares $(1, 2)$ y $(4, 5)$.
    b) Idem que el anterior para $(1, 2)$ y $(2, 5)$.
    c) Para la relación definida por la parte anterior, hallar [1], [2] y [3].

6. Consideramos la relación de congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$: $a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b$ es multiplo de n.

   a) Probar que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

   b) Probar que el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene exactamente n elementos.

   c) Probar que si $a \equiv_n a'$ y $b \equiv_n b'$, entonces:

      - $a + b \equiv_n a' + b'$
      - $a.b \equiv_n a'.b'$.

      El punto b permite definir la suma y el producto en $\mathbb{Z}/\equiv_n$, mediante $[a] + [b] = [a + b]$ y $[a].[b] = [a.b]$.

7. Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos la siguiente relación en X:

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

   a) Probar que $\sim_f$ es una relación de equivalencia.

   b) Probar que la partición inducida por $\sim_f$ está en biyección con $Im(f)$.

8. Sea la relación en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $u = \lambda v$.

   a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Determinar cuáles son las clases de equivalencia y representar geométricamente una clase de equivalencia.

   c) Elegir un representante de cada clase de forma que el conjunto de representantes elegido sea fácilmente representable geométricamente.

9. **Construcción del conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$**

   a) Comparar los conjuntos $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ y $\mathbb{Z}$ (no se trata de dar una respuesta, sino de introducirse en el tema).

   b) Definir una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ de manera tal que $\frac{\mathbb{N}\times\{0,1\}}{\sim} = \mathbb{Z}$.

   Esta es una forma de construir los enteros a partir de los naturales que resulta amigable para luego definir la suma, el producto y el orden usual de los enteros.