Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen teórico. 23/07/2021.

1. (**30 puntos**) Sea $\varphi : G \to F$ un morfismo y N un subgrupo normal de G tal que $N \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$.

   a) Probar que existe un único morfismo $\hat{\varphi} : G/N \to F$ tal que $\hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$, siendo $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica.

   b) Probar que $\hat{\varphi}$ es inyectivo si y solo si $N = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

2. (**30 puntos**)

   a) Definir p-subgrupo de Sylow.

   b) Probar que si G es un grupo finito y p es un primo, entonces G contiene un p-subgrupo de Sylow.

3. (**40 puntos**)

   a) Dada una extensión F/K, definir su grupo de Galois $\operatorname{Gal}(F/K)$ y definir qué quiere decir que F/K sea una extensión de Galois.

   b) Dar ejemplos de una extensión que sea de Galois y de una que no lo sea, justificando la respuesta.

   c) Enunciar el teorema de Artin.

   d) Sea F/K una extensión de cuerpos. Se consideran las siguientes afirmaciones.

      1) F/K es finita y $|\operatorname{Gal}(F/K)| = [F : K]$.
      2) F/K es de Galois.
      3) $K = F^H$, siendo H un subgrupo finito del grupo de automorfismos de F.

      Probar 1) $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3).

Nota. En lo anterior se deben de justificar todas las afirmaciones. Si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo “usando el teorema que dice ..., entonces ...”