Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen teórico. 10/08/2021.

1. (**30 puntos**) Se considera el grupo simétrico $\mathcal{S}_n$.

   a) Definir *ciclo* y *trasposición.*

   b) Sea C el conjunto de todos los ciclos de $\mathcal{S}_n$ y T el conjunto de todas los trasposiciones de $\mathcal{S}_n$. ¿Qué diferencias tienen C y T como generadores de $\mathcal{S}_n$?

   c) Definir permutación *par* e *impar*, justificando la definición.

   d) ¿La permutación (1234) es par o impar? Justificar la respuesta.

2. (**30 puntos**) Sea G un p-grupo finito.

   a) Probar que si G actúa en un conjunto finito X y X^G es el conjunto de los puntos fijos por la acción, entonces $\left|X^G\right| \equiv |X| (\text{mod } p)$.

   b) Probar que $G \neq \{1\}$ implica $Z(G) \neq \{1\}$, siendo $Z(G)$ es el centro de G.

   c) Probar que existe una torre de subgrupos

   $$\{1\} = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

   tal que $G_i \lhd G$ y $|G_i| = p^i$, para todo $i = 0, \ldots, n$.

3. (**40 puntos**)

   a) Definir extensión *finita*, extensión *finitamente generada* y extensión *algebraica.*

   b) Dar un ejemplo de una extensión de cada tipo, justificando la respuesta.

   c) Enunciar y probar el teorema de Artin.

Nota. En lo anterior se deben de justificar todas las afirmaciones. Si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."