Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen. 17/12/2021.

1. (**50 puntos.**)
Se considera el grupo alternado A_n, $n \geq 3$.

   a) Se considera el subgrupo $N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} < A_4$. Probar que N es normal.

   b) Probar que A_n es el subgrupo de $\mathcal{S}_n$ generado por los 3-ciclos.
   Sugerencia: hallar la descomposición en producto de ciclos disjuntos de $(ab)(bc)$ y $(abc)(bcd)$.

   c) Probar que A_n es el único subgrupo de $\mathcal{S}_n$ de índice 2.

   d) Sea G un grupo de orden 12.

      1) Probar que si existe $H < G$ tal que $|H| = 3$ y $H \ntriangleleft G$, entonces la acción de G en G/H dada por $g \cdot \overline{x} = \overline{gx}$, induce un isomorfismo $G \simeq A_4$.

      2) Probar que G contiene un subgrupo de Sylow normal.

2. (**50 puntos.**)
Considerar $u = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ y $F = \mathbb{Q}(u)$.

   a) Hallar $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(u)$ y el grado de $F/\mathbb{Q}$.

   b) Probar $\sqrt[3]{2} \in F$ y hallar el polinomio irreducible de u sobre $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

   c) Determinar las raíces de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(u)$. *Sugerencia:* hallar primero las raíces de $X^3 - 2$.

   d) Determinar $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

   e) ¿Es $F/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois? Justificar la respuesta.

   f) Determinar el cuerpo F^G.

Solución.

1. *a*) Si $\sigma \in A_4$, entonces $\sigma(ab)(cd)\sigma^{-1} = \big(\sigma(a)\sigma(b)\big)\big(\sigma(c)\sigma(d)\big) \in N$. Esto implica $N \lhd A_4$.

   b) Es $(ab)(bc) = (abc)$ y $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$. Todo elemento de A_n se escribe como producto de un número par de trasposiciones y aplicando lo anterior se obtiene lo pedido.

   c) Sea $H < \mathcal{S}_n$ tal que $[\mathcal{S}_n : H] = 2$. Si $\tau \in \mathcal{S}_n$ es un 3-ciclo arbitrario, entonces

$$|H| \times |\langle\tau\rangle| = \frac{n!}{2} \times 3 = \frac{3}{2}n! > n! = |\mathcal{S}_n| \quad \Rightarrow \quad |H \cap \langle\tau\rangle| = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau \in H.$$

   Luego usando la parte anterior deducimos $H = A_n$.

   d) 1) Sea $\varphi : G \to \mathrm{Biy}(G/H) \simeq \mathcal{S}_4$ el morfismo asociado a la acción y $K = \operatorname{Ker}\varphi$. Sabemos $K < H$, por lo tanto $K = H$ o K es trivial. Como H no es normal, entonces K es trivial y por lo tanto φ es inyectivo. Luego $\varphi(G) < \mathcal{S}_4$ y $|\varphi(G)| = 12$. Luego $\varphi(G) = A_4$ (por la parte c)).

   2) Es $n_3 = 1$ o $n_3 = 4$. Si $n_3 = 1$, entonces $S_3 \lhd G$. Si $n_3 = 4$, entonces $G \simeq A_4$ (por la parte anterior); esto por la parte a) implica $S_2 \lhd G$.

2. *a*) A partir de

$$u = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}} \quad \Rightarrow \quad u^2 = 1 + \sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad \left(u^2 - 1\right)^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1 = 0$$

   deducimos $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(u) = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 3$ (Eisenstein); luego $[F : \mathbb{Q}] = 6$.

   b) A partir de $u^2 = 1 + \sqrt[3]{2}$, deducimos $\sqrt[3]{2} \in F$ y que u es raíz de $X^2 - 1 - \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.
   Es $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}\left(\sqrt[3]{2}\right) = X^3 - 2$ (Eisenstein); luego $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$ y por lo tanto $\left[F : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)\right] = 2$, luego $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)}(u) = X^2 - 1 - \sqrt[3]{2}$.

   c) Las raíces de $X^3 - 2$ son $w^l\sqrt[3]{2}$, con $l = 0, 1, 2$, siendo $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Luego

$$v^6 - 3v^4 + 3v^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(v^2 - 1\right)^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 1 + w^l\sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{1 + w^l\sqrt[3]{2}}$$

   Luego las raíces de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(u)$ son $\pm\sqrt{1 + w^l\sqrt[3]{2}}$, con $l = 0, 1, 2$, siendo $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

   d) Es fácil de probar que las únicas raíces de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(u)$ que están en F son $\pm u$; luego $G = C_2 = \{\mathrm{id}, \sigma\}$, en que $\sigma(u) = -u$ y $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}$.

   e) Es $[F : \mathbb{Q}] = 6$ y $|\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})| = 2$, luego $F/\mathbb{Q}$ no es de Galois.

   f) Sabemos $\left[F : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)\right] = 2$. De $u^2 = 1 + \sqrt[3]{2}$, deducimos $\sigma\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}$; luego $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) \subset F^G$. Por otro lado como G no es trivial, entonces $F^G \subsetneq F$, lo cual fuerza $F^G = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.