Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen teórico. 02/03/2022.

1. (**30 puntos**) Sea G un grupo finito y H un subgrupo.

   a) Definir *congruencia* (a la izquierda) módulo H. Probar que es una relación de equivalencia en G.

   b) Probar que todas las coclases izquierdas respecto a H tienen la misma cantidad de elementos.

   c) Enunciar y probar el teorema de Lagrange.

2. (**30 puntos**)

   a) Definir subgrupo normal.

   b) Enunciar la propiedad universal del cociente y el primer teorema de isomorfismo.

   c) Sea G un grupo, K un subgrupo y N un subgrupo normal. Sabemos que esto implica que NK es un subgrupo de G. Probar:

      1) N es un subgrupo normal de NK,
      2) $N \cap K$ es un subgrupo normal de K,
      3) $\frac{NK}{N} \simeq \frac{K}{N \cap K}$.

3. (**40 puntos**)

   a) Definir extensión de cuerpos *finita*.

   b) Dar un ejemplo de una extensión que sea finita y de una que no lo sea, justificando la afirmación.

   c) Sean K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que si $u, v \in \mathbb{C}$ son raíces de f, entonces existe un único K-isomorfismo $\sigma : K(u) \to K(v)$ tal que $\sigma(u) = v$.

   d) Definir grupo de Galois y extensión de Galois.

   e) Indicar si $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ es una extensión de Galois o no, justificando la respuesta.

Nota. En lo anterior se deben de justificar todas las afirmaciones. Si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."