Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2021

Prueba 1. 06/05/2021

1. Sea G un grupo que contiene dos elementos g, f que conmutan entre sí y sus órdenes son finitos.
   a) Probar que gf tiene orden finito.
   b) Probar que si los órdenes de g y f son primos entre sí, entonces $|gf| = |g| \cdot |f|$.

2. Sean G un grupo, K un subgrupo de índice finito y H un subgrupo arbitrario.
   a) Probar que valen $[H : H \cap K] < \infty$ y $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.
   b) Probar que vale $[H : H \cap K] = [G : K]$ si y solo si $G = HK$.

   Recordar $HK := \{hk : \ h \in H, \ k \in K\}$.

3. Sean H y K subgrupos de un mismo grupo G.
   a) Probar que $(h, k) \cdot (h_0 k_0) = h h_0 k_0 k^{-1}$ define una acción del grupo $H \times K$ en el conjunto HK.
   b) Probar que la acción es transitiva.
   c) Probar que la acción es fiel si y solo si $Z(H) \cap Z(K) = \{1\}$, siendo $Z(\ )$ el centro del subgrupo.

Solución

1. (Práctico 1, ej. 8). Sean $|g| = m$ y $|f| = n$.

   a) De $gf = fg$, deducimos $(gf)^{mn} = g^{mn} f^{mn} = (g^m)^n (f^n)^m = 1$. Luego gf tiene orden finito.

   b) Sea $|gf| = d$. Por la parte anterior es $d \mid mn$. Además

   $$1 = (gf)^d = g^d f^d \quad \Rightarrow \quad g^d = f^{-d}.$$

   Entonces

   $$g^{dn} = f^{-dn} = (f^n)^{-d} = 1 \quad \Rightarrow \quad m \mid dn \quad \Rightarrow \quad m \mid d \text{ (porque } \operatorname{mcd}(m,n) = 1).$$

   Análogamente se prueba $n \mid d$ y por lo tanto $mn \mid d$ (porque $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$) Luego $d = mn$.

2. (Práctico 2, ej. 11). Sean $K, H < G$ tales que $[G : K] < \infty$.

   a) Es fácil de probar que si $h_1, h_2 \in H$, entonces

   $$\overline{h_1} = \overline{h_2} \text{ en } H/H \cap K \quad \Leftrightarrow \quad \overline{h_1} = \overline{h_2} \text{ en } G/K.$$

   Luego $\varphi : H/H \cap K \to G/K$, $\overline{h} \mapsto \overline{h}$, está bien definida y es inyectiva. Esto implica la tesis.

   b) Observar que vale

   $$[H : H \cap K] = [G : K] \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ es biyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ es sobreyectiva.}$$

   Luego lo que tenemos que probar es que φ es sobreyectiva si y solo si $G = HK$.
   Supongamos $G = HK$. Si $g \in G$, entonces existen $h \in H$ y $k \in K$ tales que $g = hk$. Luego $gK = hkK = hK$, lo cual implica $\varphi(\overline{h}) = \overline{g}$. Luego φ es sobreyectiva.
   Supongamos que φ es sobreyectiva. Sea $g \in G$, entonces existe $h \in H$ tal que $\varphi(\overline{h}) = \overline{g}$, luego $\overline{h} = \overline{g}$ en G/K y por lo tanto existe $k \in K$ tal que $g = hk$. Esto implica $G = HK$.

3. (Práctico 3, ej. 2.)

   a) Es directo.

   b) Vale $(h, k^{-1}) \cdot 1 = hk$, para todo $h \in H$, $k \in K$. Luego la acción es transitiva.

   c) Sea $N = \{\alpha \in H \times K : \ \alpha \cdot x = x, \ \forall x \in HK\}$. La acción es fiel si y solo si $N = \{(1,1)\}$. Probaremos $N = \{(g,g) : \ g \in Z(H) \cap Z(K)\}$, lo cual equivale a la tesis.
   Es fácil de probar que si $g \in Z(H) \cap Z(K)$, entonces $(g,g) \in N$; probaremos la otra inclusión.
   Sea $\alpha \in N$. De $\alpha \cdot 1 = 1$, deducimos $\alpha = (g,g)$, con $g \in H \cap K$. Luego

   $$\alpha \cdot h = h, \ \forall h \in H \quad \Rightarrow \quad ghg^{-1} = h, \ \forall h \in H \quad \Rightarrow \quad gh = hg, \ \forall h \in H \quad \Rightarrow \quad g \in Z(H).$$

   Análogamente se prueba $g \in Z(K)$. Luego $\alpha = (g,g)$, con $g \in Z(H) \cap Z(K)\}$.