

Prueba 2. 12/06/2021

1. (10 puntos)

- a) Probar que si H es un subgrupo normal de un grupo G tal que H es un subgrupo cíclico, entonces todo subgrupo de H es normal en G .
- b) Probar que el grupo diedral $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ba = a^3b \rangle$ contiene dos subgrupos H y K tales que $K \subset H$, K es normal en H , H es normal en D_4 y K no es normal en D_4 .

2. (10 puntos) Sea A_n el grupo alternado (el subgrupo de $\mathcal{S}_n$ formado por las permutaciones pares).

- a) Probar que A_n es el subgrupo de $\mathcal{S}_n$ generado por los 3-ciclos.
Sugerencia: notar que vale $(ab)(bc) = (abc)$ y $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$.
- b) Probar que A_n es el único subgrupo de $\mathcal{S}_n$ de índice 2.

3. (10 puntos)

- a) Probar que no hay grupos simples de orden 36.
- b) Sea G un grupo finito y H un subgrupo.
 - 1) Probar que cada p -subgrupo de Sylow de H está contenido en un p -subgrupo de Sylow de G .
 - 2) Probar que dos p -subgrupos de Sylow de H diferentes entre sí no pueden estar contenidos en un mismo p -subgrupo de Sylow de G .

Solución

1. a) Sea $H = \langle a \rangle$ y $K < H$. Sabemos que existe $k > 0$ tal que $K = \langle a^k \rangle = \{a^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$. Sea $g \in G$ arbitrario. Como es $H \triangleleft G$, entonces existe m tal que $gag^{-1} = a^m$. Luego

$$ga^{kn}g^{-1} = (gag^{-1})^{kn} = a^{knm} = (a^k)^{nm} \in K, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

- b) Una posibilidad es $K = \langle b \rangle = \{1, b\}$ y $H = \langle b \rangle \langle a^2 \rangle = \{1, b, a^2, a^2b\}$. Notar que H es un subgrupo porque vale $a^2b = ba^2$ (vale $\langle a^2 \rangle = Z(D_4)$). De $[D_4 : H] = 2$ deducimos $H \triangleleft D_4$ y por lo mismo es $K \triangleleft H$. Pero $aba^{-1} = a^2b \notin K$, luego $K \not\triangleleft D_4$.

2. a) Sabemos que todo 3-ciclo está en A_n , así que lo que resta es probar que todo elemento de A_n es producto de 3-ciclos. Si $\sigma \in A_n$ entonces existen pares de trasposiciones τ_i, τ'_i , $i = 1, \dots, k$ tales que $\sigma = (\tau_i \tau'_i) \cdots (\tau_k \tau'_k)$. La sugerencia muestra que cada producto $\tau_i \tau'_i$ se puede escribir como un producto de 3-ciclos, luego σ se puede escribir como un producto de 3-ciclos.

- b) Sea $H < \mathcal{S}_n$ tal que $[\mathcal{S}_n : H] = 2$. Sea σ un 3-ciclo y $K = \langle \sigma \rangle$. Recordar $HK = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}$. Es $|H| \times |K| = \frac{n!}{2} \times 3 > n! = |\mathcal{S}_n|$. Luego

$$|H \cap K| \neq 1 \Rightarrow |H \cap K| = 3 \Rightarrow H \cap K = K \Rightarrow K \subset H \Rightarrow \sigma \in H.$$

Entonces H contiene a todos los 3-ciclos y por la parte anterior deducimos $H = A_n$.

3. a) Sea $|G| = 36$. Operando obtenemos $n_3 = 1$ o $n_3 = 4$. Si $n_3 = 1$ entonces $S_3 \triangleleft G$. Supongamos ahora $n_3 = 4$. Entonces $[G : N_G(S_3)] = 4$ y como $36 \nmid 4! = 24$, entonces $|G| \nmid [G : N_G(S_3)]!$. Luego existe $\{1\} \neq K < N_G(S_3)$ tal que $K \triangleleft G$. Además como es $[G : N_G(S_3)] \neq 1$, entonces es $K \neq G$.
- b) 1) Cada p -subgrupo de Sylow de H es un p -subgrupo de G y por lo tanto está contenido en algún p -subgrupo de Sylow de G (segundo teorema de Sylow).
- 2) Supongamos $|G| = p^n a$, con $p \nmid a$. Entonces es $|H| = p^m b$, con $p \nmid b$ y $m \leq n$. Sea $K < H$ tal que $|K| = p^m$. Por la parte anterior existe $S_p < G$ tal que $|S_p| = p^n$ y $K \subset S_p$. Tomando órdenes en $K < S_p \cap H$, $S_p \cap H < S_p$, $S_p \cap H < H$, deducimos $|S_p \cap H| = p^m$, luego $K = S_p \cap H$. Por lo tanto K es el único p -subgrupo de Sylow de H contenido en S_p .