Relaciones II

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

0.1. Relaciones de orden

Sea X un conjunto.
Una **relación de orden** en X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en X.
Generalmente usaremos para las relaciones de orden notaciones del estilo $\leq$ o $\preceq$.
Una **relación de orden estricto** en X es una relación asimétrica y transitiva en X.
Para las relaciones de orden estrito usamos generalmente la notación: $<$ o $\prec$.

Proposición 0.1.1. *Si $\leq$ es una relación de orden amplio en X, entonces la relación $<$ definida por*

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \ y \ x \neq y, \quad \forall x \in X$$

es una relación de orden estricto.
Por otro lado, si $<$ es una relación de orden estricto, entonces la relación definida por

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \ o \ x = y$$

es una relación de orden amplio.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Un **conjunto ordenado** es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden en X. Observar que si $A \subset X$, entonces la relación $\leq$ define una relación de orden en A. Puede entonces considerarse el conjunto ordenado $(A, \leq)$ (abusamos aquí del lenguaje, usando la misma notación para $\leq$ y para $\leq \cap (A \times A)$).

Diremos que X es un **conjunto totalmente ordenado** si se cumple que dado un par de elementos $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Es decir que todos los elementos son comparables. También se dice que $\leq$ es un **orden total** en X.
Una **cadena** en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subset X$ que está totalmente ordenado.

Ejemplos 0.1.2.

1. Recordando la definición de números enteros dada en el último ejercicio del Repartido 3, observar que el orden usual en este conjunto queda definido por:
   - $[(n, 0)] \leq [(m, 0)]$ si $m \leq n$,
   - $[(n, 1)] \leq [(m, 1)]$ si $n \leq m$, y
   - $[(n, 0)] \leq [(m, 1)]$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.

   Este es un orden total.
2. Dado un conjunto cualquiera X, ponemos en el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ el orden $A \leq B$ si y solo si $A \subset B$. Este no es un orden total, salvo que X sea un conjunto unitario.

Fijemos ahora $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que

- $m \in X$ es un elemento **minimal** si $x \leq m$ implica $x = m$.
- $M \in X$ es un elemento **maximal** si $M \leq x$ implica $x = m$.
- $m \in X$ es un **mínimo** si $m \leq x$ para todo $x \in X$.
- $M \in X$ es un **máximo** si $x \leq M$ para todo $x \in X$.

Observar que si $(X, \leq)$ tiene un máximo, entonces este es único (lo mismo para mínimo).

0.2. Números racionales

Consideremos en el conjunto $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ (con $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos) la relación dada por

$$(n, m) \sim (k, r) \Leftrightarrow nr = mk.$$

Veamos primero que es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $(n, m) \sim (n, m)$ porque claramente $nm = nm$.

- Es simétrica: si $(n,m) \sim (k,r)$, entonces $nr = mk$. Esto implica que $mk = nr$ y luego $(k,r) \sim (n,m)$.
- Supongamos que $(n,m) \sim (k,r)$ y $(k,r) \sim (\ell,h)$, es decir, $nr = mk$ y $kh = r\ell$. Luego multiplicando la primera igualdad por h se tiene

$$nrh = mkh = mr\ell.$$

  Como $r \neq 0$, la igualdad anterior implica $nh = m\ell$, lo que significa que $(n,m) \sim (\ell,h)$.

Adoptaremos la notación $\frac{n}{m}$ para referirnos a la clase de (n,m) y escribimos $\mathbb{Q} := X/\sim$. Este cociente es el conjunto de los **números racionales**. A partir de esta construcción podemos observar que los números enteros pueden verse como un subconjunto de los números racionales. Más precisamente lo hacemos mediante la función inyectiva

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ i(n) = \frac{n}{1}.$$

Definimos las operaciones suma y producto en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{r} = \frac{nr+km}{mr}; \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{r} = \frac{nk}{mr}.$$

Se deja como ejercicio probar que estas operaciones están bien definidas, es decir que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $\frac{k}{r} = \frac{k'}{r'}$, entonces

$$\frac{nr+km}{mr} = \frac{n'r'+k'm'}{m'r'} \text{ y } \frac{nk}{mr} = \frac{n'k'}{m'r'}.$$

Observar que las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ extienden a las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$i(n) + i(m) = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} = i(n+m)$$

y

$$i(n) \cdot i(m) = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = i(nm).$$

La relación de orden usual en los números racionales es definida de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} \leq \frac{k}{r} \Leftrightarrow nr \leq_{\mathbb{Z}} km,$$

donde se eligen representantes tales que m, r positivos, y el símbolo $\leq_{\mathbb{Z}}$ indica el orden usual en los enteros. Queda para el lector observar que la relación está bien definida y que $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

0.3. Matriz asociada a una relación

Supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ y que $\mathcal{R}$ es una relación de X en Y. La **matriz asociada** a $\mathcal{R}$ es una matriz de n columnas y m filas (a_{ij}) tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \mathcal{R} y_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tener en cuenta que la definición de matriz asociada depende de cómo ordenamos los elementos de los conjuntos X e Y, por lo que hay los datos necesarios para determinarla son: los conjuntos finitos, la relación y un orden total en cada conjunto.

Ejemplo 0.3.1. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3\}$ y la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), , (2,3), (4,1), (4,3)\}.$$

Su matriz asociada nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observar que dada una matriz de $n \times m$ y conjuntos X, Y con n, m elementos respectivamente, dispuestos en cierto orden, existe una única relación cuya matriz asociada es la dada.

Matriz asociada a la composición de dos relaciones Para facilitar el enunciado del resultado que sigue, precisamos una definición auxiliar. Dada una matriz de coeficientes naturales A, notamos $\hat{A}$ a la matriz que se obtiene cambiando de A, sustituyendo los naturales estricamente positivos por 1.

Proposición 0.3.2. *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ de X en Y y de Y en Z respectivamente.*
Consideremos órdenes totales en X, Y, Z. Notemos A, B a las matrices asociadas a $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ respectivamente.
La matriz asociada a $S \circ R$, con los mismos órdenes considerados anteriormente, es la matriz $\hat{AB}$.

Demostración. La veremos en clase. □

Más adelante nos interesará contar el número de relaciones que cumplan con determinadas propiedades. En ese caso la representación matricial de las relaciones nos será útil.