Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2021

Práctico 5

1. Expresar cada una de las permutaciones siguientes como producto de ciclos disjuntos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (123)(45)(16789)(15).$$

2. Calcular $(xa)(xb)(xa)$. Probar que $\mathcal{S}_n$ está generado por cada uno de los siguientes conjuntos

$$\{(12),(13),\ \ldots,(1n)\}; \qquad \{(12),(23),\ \ldots,(n-1,n)\}; \qquad \{(12),(123\cdots n)\};$$
$$\{(ab),(ab\cdots)\},\ \text{siendo } a,b \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ arbitrarios y } (ab\ \cdots) \text{ un } n\text{-ciclo.}$$

3. Probar que si $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ son ciclos disjuntos, entonces $|\sigma_1\cdots\sigma_r| = \operatorname{mcm}\{|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_r|\}$.

4. Calcular los órdenes de las permutaciones del ejercicio 1.

5. Probar que si p es primo y σ es un p-ciclo, entonces σ^l es un p-ciclo, para todo $l = 1,\cdots,p-1$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 3. Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si p no es primo.

6.
   a) Probar que si p es primo, entonces $\mathcal{S}_p$ está generado por $\{(ab),\ (123\cdots p)\}$, siendo (ab) una trasposición arbitaria.

   b) Probar que $\{(13),\ (1234)\}$ no genera a $\mathcal{S}_4$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 2 del Práctico 2. Esto implica que la afirmación de la parte anterior es falsa cuando p no es primo.

7. Se considera el conjunto $N = \{\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \subset \mathcal{S}_4$.

   a) Probar que N es un subgrupo de $\mathcal{S}_4$.

   b) Probar que N es normal en $\mathcal{S}_4$.

   c) Deducir que A_4 no es simple.

   d) Probar $A_4/N \simeq \mathbb{Z}_3$ y $\mathcal{S}_4/N \simeq \mathcal{S}_3$.

8. Probar que A_n es el subgrupo de $\mathcal{S}_n$ generado por los 3-ciclos. *Sugerencia:* notar que vale $(ab)(bc) = (abc)$ y $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$.

9. Probar que el grupo alternado A_n es el único subgrupo de $\mathcal{S}_n$ de índice 2. *Sugerencia:* probar que si $H < \mathcal{S}_n$ y $[\mathcal{S}_n : H] = 2$, entonces H contiene a todos los 3-ciclos de $\mathcal{S}_n$.

10. Probar que A_4 no contiene subgrupos de orden 6.