Imágenes por Resonancia Magnética 2021

Práctico III – Relajación y Mecánica Cuántica

Ejercicio 1

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Bloch:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dM_z}{dt}\right)' &= -\omega_1 M_{y'} + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \\
\left(\frac{dM_{x'}}{dt}\right)' &= \Delta\omega\ M_{y'} - \frac{M_{x'}}{T_2} \\
\left(\frac{dM_{y'}}{dt}\right)' &= -\Delta\omega\ M_{x'} + \omega_1 M_z - \frac{M_{y'}}{T_2}
\end{aligned}$$

a) Resuélvalas en el estado estacionario para un B_1 arbitrario y muestre que las soluciones son:

$$\begin{aligned}
M_{x'}^{ss} &= M_0 \frac{\Delta\omega\ T_2}{D} \omega_1 T_2 \\
M_{y'}^{ss} &= M_0 \frac{1}{D} \omega_1 T_2 \\
M_z^{ss} &= M_0 \frac{1 + (\Delta\omega\ T_2)^2}{D}
\end{aligned}$$

Siendo $D = 1 + (\Delta\omega\ T_2)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2$.

b) Muestre que $M_{x\prime}^{SS}$ y $M_{y\prime}^{SS}$ son de primer orden en ω_1 y $M_0 - M_z^{SS}$ es de orden ω_1^2.

c) Muestre que para la magnetización en el estado estacionario se da un cambio de fase en el plano $x' - y'$:
$\Delta\phi = \cot^{-1}(\Delta\omega T_2) \qquad (\text{mod } \pi)$

Ejercicio 2

Considere dos materiales A y B con el mismo valor de M_0 y con constantes de relajación distintas (T_{1A}, T_{2A}) y (T_{1B}, T_{2B}) respectivamente. Sea $\Delta S_{xy}(t) = M_{xyA}(t) - M_{xyB}(t)$ la diferencia entre magnetizaciones transversas, y $\Delta S_z = M_{zA}(t) - M_{zB}(t)$ la diferencia entre magnetizaciones longitudinales. Asuma una excitación de 90^o.

a) Encuentre la expresión para el tiempo que maximiza $|\Delta S_{xy}|$.

b) Encuentre la expresión para el tiempo que maximiza $|\Delta S_z|$.

c) Evalúe las expresiones anteriores si los dos materiales son materia blanca y materia gris en un campo $B_0 = 1T$.

Ejercicio 3

Un material tiene una magnetización de equilibrio M_0 y constantes de relajación T_1 y T_2. Si se aplica una excitación de *90º*, encuentre una expresión para $|M(t)|$, la magnitud de la magnetización en función del tiempo. Muestre que si $T_2 < T_1$, $|M(t)|$ nunca excede M_0.

Ejercicio 4

Un operador $\hat{A}$, que representa el observable A, tiene los autoestados normalizados ψ_1 y ψ_2, con los autovalores a_1 y a_2, respectivamente. El operador $\hat{B}$, que representa el observable B, tiene dos autoestados normalizados φ_1 y φ_2, con los autovalores b_1 y b_2, respectivamente. Los autoestados están relacionados por:

$$\psi_1 = (3\varphi_1 + 4\varphi_2),\ \ \psi_2 = (4\varphi_1 - 3\varphi_2)/5$$

a) Se mide el observable A, y se obtiene el valor a_1. ¿Cuál es el estado del sistema inmediatamente después de la medida?

b) Si ahora se mide B, ¿cuáles son los posibles resultados y sus probabilidades?

c) Justo después de la medida de B, A se mide de nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_1?
(Nótese que la respuesta sería muy diferente si se conociera de antemano el resultado de la medida B)

Ejercicio 5

El Hamiltoniano de un cierto sistema de tres niveles se representa con la matriz:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Donde a, b y c son números reales (asuma que $a - b \neq \pm b$)

a) Si el estado inicial del sistema es:

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale $|s(t)\rangle$?

b) Si el estado inicial del sistema es:

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $|s(t)\rangle$.

Ejercicio 6

El Hamiltoniano de un sistema de tres niveles está representado por la matriz:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tienen dos observables, *A* y *B*, representadas por las matrices:

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde ω, λ y μ son números reales positivos.

a) Encuentre los autovalores y autoestados normalizados de ***H, A*** y ***B.***

b) Suponiendo que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

con $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Encuentre los valores esperados (a $t = 0$) de *H, A* y *B.*

c) Calcule $|s(t)\rangle$.

d) Si se mide la energía del sistema (al tiempo *t*), ¿qué valores se obtienen y cuál es la probabilidad de cada uno? Responda a las mismas preguntas para *A* y *B.*

Ejercicio 7

Considere un espacio vectorial tridimensional con la base ortonormal: $|1\rangle,\ |2\rangle,\ |3\rangle$. Sean los kets: $|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$.

a) Construya $\langle\alpha|$ y $\langle\beta|$ (en términos de la base dual $\langle 1|$, $\langle 2|$ y $\langle 3|$).

b) Encuentre $\langle\alpha|\beta\rangle$ y $\langle\beta|\alpha\rangle$, y confirme que $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$.

c) Encuentre los nueve elementos del operador en forma de matriz $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$, en esta base. Construya la matriz del operador ¿es hermítico?

Ejercicio 8

El Hamiltoniano para un cierto sistema de dos niveles es:

$$\hat{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

Donde $|1\rangle$ y $|2\rangle$ es una base ortonormal y ε es un número con las dimensiones de energía.
Encuentre los autovalores y autoestados (como combinaciones lineales de $|1\rangle$ y $|2\rangle$) y la matriz que representa a este operador en esta base.