Mecánica clásica 2020

Práctico I – Cinemática de la Partícula y Movimiento Relativo

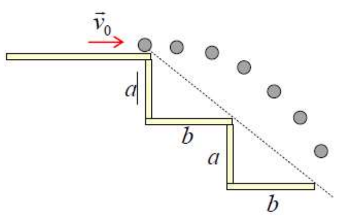
Ejercicio 1

a) Calcule la aceleración centrípeta que experimenta un punto de la superficie de la Tierra en Montevideo (latitud 34.9 º).

b) Sabiendo que luz que nos llega desde el Sol demora 8 minutos, calcule la aceleración centrípeta de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

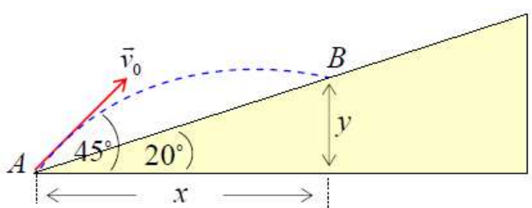
Ejercicio 2

Una bolita sale rodando horizontalmente con velocidad $v0$ =3 m/s por el hueco de una escalera (ver figura) Los escalones tienen alto a =18 cm y ancho b = 32 cm. Encuentre el escalón en el cual la bolita cae por primera vez. [En este ejercicio y el siguiente desprecie la resistencia del aire.]



Ejercicio 3

Se lanza una pelota desde el punto A con una rapidez inicial de 25m/s, con un ángulo de $\theta = 45°$ con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura. Encuentre la distancia horizontal x recorrida por la pelota hasta llegar a chocar con el plano inclinado en B.



Ejercicio 4

Un jugador de basketball recibe una falta y le conceden dos tiros libres. El centro del aro está a una distancia horizontal de 4.21 m, y a una altura de 3.05 m.

A) En el primer intento, el jugador lanza la pelota a 4,88 m/s con un ángulo de 35º desde una altura de 1.83 m y falla por mucho ¿a qué distancia cae la pelota sobre el piso?

B) El segundo tiro lo consigue encestar manteniendo el ángulo de lanzamiento pero variando la rapidez inicial v_0. Calcule v_0.

Ejercicio 5:

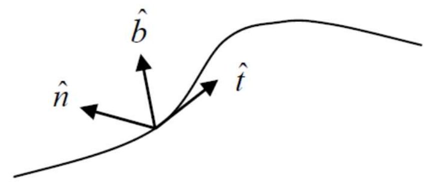
Para la cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = a(\omega t + sen(\omega t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(\omega t)) \end{cases} \qquad -\pi < \omega t \leq \pi$$

a) Halle la longitud del arco *s(t)* y muestre que si θ es el ángulo que forma la recta tangente a la cicloide con *Ox,* entonces $\theta = ks$, con k una constante.
b) Determine los versores tangente, normal y binormal.

Ejercicio 6

Obtenga las fórmulas de Frenet (derivadas de los versores del triedro de Frenet respecto al parámetro de arco):



a) Ya se sabe que $\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}$. Dónde κ es la curvatura, que se relaciona con el radio de curvatura ρ según $\kappa = 1/\rho$.

b) Escribiendo $\frac{d\hat{n}}{ds} = \alpha\hat{t} + \beta\hat{n} + \gamma\hat{b}$, muestre que:
$\frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa\hat{t} + \tau\hat{b}$ dónde τ es una constante de proporcionalidad que se interpretará en c).
(Sugerencia: desarrolle las derivadas de los productos $\frac{d(\hat{n}\bullet\hat{n})}{ds} = 0$ y $\frac{d(\hat{t}\bullet\hat{n})}{ds} = 0$)

c) A partir de $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ y a) muestre que: $\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$
De aquí se deduce que $|\tau| = \left|\frac{d\hat{b}}{ds}\right|$. A la función $\tau = \tau(s)$ se la llama *torsión* y $\sigma = \frac{1}{\tau}$ se denomina *radio de torsión* (note que tiene dimensiones de longitud).

Ejercicio 7

Una partícula *P* está sometida a una aceleración de la forma $\vec{a} = -\omega^2 R\hat{e}_\rho$ expresada en coordenadas cilíndricas, siendo ω y *R* constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia *R* del eje *Oz* y tiene una velocidad de la forma:

$$\vec{v}(0) = R\omega\hat{e}_\rho + v_0\hat{k}$$

a) Halle las leyes horarias del movimiento en coordenadas cilíndricas.
Sugerencia: Observar que la aceleración es de un tipo de movimiento conocido pero que las condiciones iniciales son diferentes, por lo que se recomienda buscar soluciones de distancia al eje *Oz* constante.
b) Escriba esas ecuaciones en coordenadas cartesianas y decir de qué tipo de trayectoria se trata.
c) Escribirlas ahora en coordenadas intrínsecas, escribiendo también los versores del triedro de Frenet en función de los de la base de coordenadas cilíndricas.
d) Darle interpretación física a las cantidades $c = \sqrt{(R\omega)^2 + (v_0)^2}$ y el ángulo α definido por $\cos\alpha = \frac{R\omega}{c}$ y $sen\ \alpha = \frac{v_0}{c}$. Estudiar el movimiento discutiendo según sea $R\omega \gg v_0$ o $R\omega \ll v_0$.

Ejercicio 8

El *vector de Darboux* se define como: $\vec{D} = \tau\hat{t} + \kappa\hat{b}$.

a) Muestre que las fórmulas de Frenet se pueden escribir:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{t}}{ds} = \vec{D} \times \hat{t} \\ \dfrac{d\hat{n}}{ds} = \vec{D} \times \hat{n} \\ \dfrac{d\hat{b}}{ds} = \vec{D} \times \hat{b} \end{cases}$$

b) Cómo se relaciona $\vec{D}$ con el vector velocidad angular del triedro? Describa la rotación instantánea del triedro de Frenet, interpretando las componentes de $\vec{D}$.

Ejercicio 9

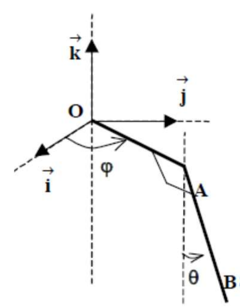
Un niño se encuentra, en $t = 0$, en el centro de una calesita que gira con velocidad ω constante. En ese instante, el niño comienza a moverse a lo largo de un radio dibujado en el piso de la calesita con una velocidad constante v_0 relativa a la misma.

a) Hallar la velocidad y aceleración absolutas del niño trabajando en el sistema móvil, es decir, expresarlas en los versores del sistema móvil.

b) Idem a la parte a) pero respecto a los versores del sistema absoluto.

Ejercicio 10

En el sistema de la figura, la barra *OA* está contenida en el plano $O\hat{\imath}\hat{\jmath}$ y gira alrededor de $O\hat{k}$. La barra *AB* está contenida en un plano perpendicular a *OA* y gira alrededor de ésta última.



a) Determinar la velocidad angular de la barra *AB* en función de φ (ángulo entre la barra *OA* y el eje $O\hat{\imath}$) y θ (ángulo entre la barra *AB* y una paralela al eje $O\hat{k}$ por el punto *A*).

b) Expresar dicha velocidad angular en una base solidaria a *AB*.