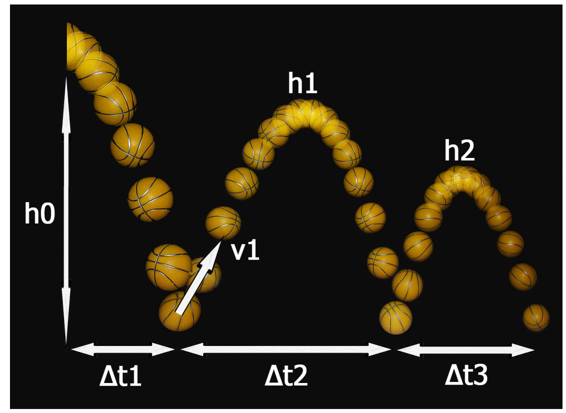
Colisiones inelásticas modelo teórico

Laboratorio de Física 1 - 2021

Facultad de Ciencias

1. Ecuaciones del movimiento para un cuerpo en caída libre

Al soltar la pelota, esta manifiesta un movimiento de proyectil, sujeto únicamente a una aceleración como resultado de la acción de la gravedad g. Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo t para la componente en el eje vertical $\vec{y}$ de la aceleración a, la velocidad v y la posición y:



$$\begin{aligned} a(t) &= -g \\ v(t) &= -g(t - t_{ini}) + v_{ini} \\ y(t) &= -g\frac{(t - t_{ini})^2}{2} + v_{ini}(t - t_{ini}) + y_{ini}. \end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones en (1) dependen del tiempo inicial t_{ini}, de la posición inicial y_{ini}, y de la velocidad inicial v_{ini}. Son validas cuando el proyectil no experimenta ninguna fuerza externa, por ejemplo despreciamos la fricción con el aire. Cuando el proyectil experimenta, un rebote el piso ejerce una reacción y las ecuaciones en (1) ya no son validas, lo son solamente entre dos rebotes o antes del primer rebote.

2. Relaciones entre altura, velocidad y tiempo entre rebotes

Consideramos esas ecuaciones con las condiciones iniciales justo después del primer rebote:

$$\begin{aligned} t_{ini} &= t_1 \\ y_{ini} &= 0 \\ v_{ini} &= v_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Las ecuaciones en (1) son válidas hasta el instante justo antes del segundo rebote al tiempo t_2 y en $y(t_2) = 0$. Para obtener una relación entre la velocidad inicial v_1 y el tiempo entre rebotes Δt_1, usamos la ecuación de posición en (1) para el tiempo t_2:

$$y(t_2) = 0 = -g\frac{(t_2 - t_1)^2}{2} + v_1(t_2 - t_1) \Rightarrow 0 = -g\frac{t_2 - t_1}{2} + v_1 \Rightarrow v_1 = g\frac{\Delta t_1}{2} \tag{3}$$

Si ahora escribimos la ecuación de velocidad en (1) en el tiempo t_2:

$$v(t_2) = -g(t_2 - t_1) + v_1 = -g\Delta t_1 + g\frac{\Delta t_1}{2} = -g\frac{\Delta t_1}{2} = -v_1 \tag{4}$$

La velocidad antes del segundo rebote es opuesta a la velocidad después del primer rebote[1].

Por otra parte, existe un instante t_{m1} donde el proyectil tiene su altura más grande $y(t_{m1}) = h_1$. En este mismo instante, la velocidad vertical pasa de ser positiva a negativa (sube antes de t_{m1}, luego baja) entonces $v(t_{m1}) = 0$. La ecuación (1) en velocidad en t_{m1} es:

$$v(t_{m1}) = 0 = -g(t_{m1} - t_1) + v_1 \Rightarrow v_1 = g(t_{m1} - t_1). \tag{5}$$

Por identifación con la ecuación (3), sabemos que $t_{m1} - t_1 = \frac{\Delta t_1}{2}$: el proyectil demora el mismo tiempo para subir que para bajar de una altura h_1. Si consideramos ahora le ecuación (1) en altura en t_{m1}, podemos establecer una relación entre la altura h_1 y el tiempo entre rebotes Δt_1 :

$$y(t_{m1}) = h_1 = -g\frac{(t_{m1} - t_1)^2}{2} + v_1(t_{m1} - t_0) + 0 \Rightarrow h_1 = \frac{g}{2^3}(\Delta t_1)^2. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) se pueden generalizar a cualquier otro rebote $i > 0$:

$$v_i = g\frac{\Delta t_i}{2} \tag{7}$$

$$h_i = \frac{g}{2^3}(\Delta t_i)^2. \tag{8}$$

Podemos entonces calcular las alturas y las velocidades al momento del rebote simplemente midiendo el tiempo entre rebotes. Ahora para la altura inicial h_0 no podemos usar esas ecuaciones (no tenemos t_0), entonces tenemos que considerar un ingrediente más.

3. Coeficiente de restitución y altura inicial

Cuando un proyectil rebota contra el piso, por ejemplo en el segundo rebote con una velocidad $-v_1$, la energía cinética $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ se conserva en el caso de una colisión elástica. Después de la colisión la energía $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ es la misma: $K_2 = K_1$. La velocidad solamente cambia de signo, pasa de negativa a positiva antes y después del rebote: $v_2 = -v_1$.

En el caso de una colisión inelástica, parte de la energía se pierde : $K_2 < K_1$. En este caso la velocidad v_i después de un rebote i es menor que la velocidad v_{i-1}. Definimos la proporción entre esas velocidades como el coeficiente de restitución $e_i = \frac{v_i}{v_{i-1}} < 1$. La ecuación (7) nos enseña que ese coeficiente también se puede calcular a partir de los tiempos entre rebotes :

$$e_i = \frac{v_i}{v_{i-1}} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}}. \tag{9}$$

Suponemos ahora que este coeficiente es constante[2] : $\forall i \in \mathbb{N}^*, e_i = e$. En particular tenemos

$$e = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}. \tag{10}$$

[1] Esto se puede entender considerando que no hay otro cambio de energía que la energía potencial gravitacional (no hay fricción por ejemplo). La energía que se pierde subiendo es la misma que la que se gana bajando: $E_{p1} = mgh_1$. Esa energía también corresponde a la energía cinética $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$.

[2] En condiciones perfectamente idénticas, si repetimos 2 veces el rebote con la misma velocidad inicial, no hay ninguna razón que el coeficiente e vaya cambiando. Entonces si el proyectil rebota exactamente en el mismo lugar con la misma velocidad también. ¿Como podemos averiguar esa hipótesis?

Finalmente, a partir de las ecuaciones (8) y (10) podemos calcular la altura inicial h_0 usando Δt_1 y Δt_2:

$$h_0 = \frac{g}{2^3}(\Delta t_0)^2 = \frac{g}{2^3}\frac{(\Delta t_1)^2}{e^2} = \frac{g}{2^3}\frac{(\Delta t_1)^4}{(\Delta t_2)^2}. \tag{11}$$

La altura inicial h_0 se puede calcular a partir del tiempo de los tres primeros rebotes t_1, t_2 y t_3.