Cardinalidad

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Nos enfocamos aquí en un par de preguntas:

- ¿Qué es contar?
- ¿Qué significa que un conjunto tenga n elementos?

Para ilustrar esto, antes de verlo formalmente, consideremos el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Lo que se hace al contar este conjunto es señalar cada elemento y decir en orden los números naturales a partir del 1, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cccccccc} \{ & a, & b, & c, & d, & e & \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Cuando ya no quedan elementos que etiquetar, se toma el último natural usado y se declara: “El conjunto tiene 5 elementos”.

Mirando la figura, podemos observar que allí se establece una función entre el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vemos además que esta función es biyectiva.

Podría pasar que dado un conjunto X no fuera posible llevar a cabo este proceso de manera de agotar todos sus elementos. En ese caso estamos en presencia de lo que llamamos un conjunto infinito.

0.1. Finitud

Diremos que un conjunto X es **finito** si es vacío o bien existe una función biyectiva

$$f : \{1, \ldots, n\} \to X$$

para algún número natural $n \in \mathbb{N}^*$. Si X no es finito diremos que es **infinito**.

El siguiente es un resultado clásico de combinatoria:

Teorema 0.1.1 (Principio del Palomar)**.** *Consideremos un número natural cualquiera n. Luego no existe ninguna función de $\{1, \ldots, n+1\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ que sea inyectiva.*

Demostración. Vamos a probar el principio del palomar por inducción.

Si $n = 1$, entonces la una única función $f : \{1, 2\} \to \{1\}$ está dada por $f(1) = f(2) = 1$. Es claro que f no es inyectiva.
Supongamos que no existe ninguna función inyectiva de $\{1, \ldots, n+1\}$ a $\{1, \ldots, n\}$ y que tenemos una función inyectiva $f : \{1, \ldots, n+2\} \to \{1, \ldots, n+1\}$.
Distinguimos dos casos

- Si $n+1 \notin f(\{1, \ldots, n+1\})$, entonces podemos definir g como la restricción de f al conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$.
- En el otro caso se tiene un (único) $a \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ tal que $f(a) = n+1$. Tomemos $b = f(n+1)$, definimos g de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

En ambos casos, la función g construida es inyectiva, lo que nos lleva a una contradicción.
Por inducción tenemos la tesis del teorema. □

El nombre *Principio del Palomar* se debe a su formulación más popular: No pueden meterse $n+1$ palomas en n jaulas sin que dos palomas compartan una jaula.

Corolario 0.1.2.

1. *Consideremos números naturales n, m tales que $n < m$. Luego no existe ninguna función de $\{1, \ldots, m\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ que sea inyectiva.*
2. *$\mathbb{N}$ es infinito.*

Demostración.

1. Si $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ es inyectiva y $m > n$, podemos restringir f al conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ y la restricción sería también inyectiva, contradiciendo el principio del palomar.

2. Si $\mathbb{N}$ fuera finito, para cierto n, existiría una función $f : \mathbb{N} \to \{1, 2, \cdots, n\}$. Restringiendo f a $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, obtenemos una función inyectiva que contradice el Principio del Palomar.

□

Proposición 0.1.3. *Sea $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ una función.*

- *Si f es inyectiva, entonces $n \leq m$.*
- *Si f es sobreyectiva, entonces $n \geq m$.*
- *Si f es biyectiva, entonces $n = m$.*

Demostración. La primera parte es el contrarrecíproco del Corolario a). Por otra parte, si f es sobreyectiva, por un ejercicio del práctico, sabemos que tiene una inversa a izquierda, y que ésta es inyectiva y tiene por dominio $\{1, 2, \cdots, m\}$ y por codominio $\{1, 2, \cdots, n\}$. Deducimos de lo anterior que $m \leq n$.
Finalmente, si f es biyectiva, su inversa es inyectiva, y por tanto se tiene $n \leq m \leq n$, de donde $n = m$.

□

El corolario anterior y el hecho de que la composición de funciones biyectivas es biyectiva habilitan la siguiente definición:

Definición 0.1.4. Sea X un conjunto finito. Si es vacío, decimos que 0 es el **cardinal** de X. En caso contrario, decimos que n es el **cardinal** de X si existe una función biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to X$. Escribimos $\#X = n$.

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Notaremos en este caso $X \simeq Y$. A partir de esto uno puede decir que X tiene cardinal n si $X \simeq \{1, \ldots, n\}$.

0.2. Numerabilidad

Ya observamos que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. Nos preguntamos a partir de esto qué otros conjuntos infinitos existen y si todos ellos son equipotentes a $\mathbb{N}$, o si por el contrario hay conjuntos infinitos "más grandes" que otros.

Definición 0.2.1. Diremos que un conjunto X es **numerable** si es finito o es equipotente con $\mathbb{N}$.

Es claro que $\mathbb{N}$ es numerable infinito, veamos qué otros conjuntos numerables infinitos podemos construir.

Proposición 0.2.2. *Si $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces A es numerable.*

Demostración. Para probar esto, podemos suponer que A es infinito (en el otro caso no hay nada que probar) y considerar la función $f : \mathbb{N} \to A$ definida por recurrencia de la siguiente forma:

- $f(0) = \text{mín}\, A$, y
- $f(n) = \text{mín}(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\})$.

Observar que como supusimos que este conjunto es infinito el paso recursivo siempre puede hacerse. Luego f queda bien definida.
Es claro que f es inyectiva. Por otro lado, si no fuera sobreyectiva, tomemos $n_0 = \text{mín}(A \setminus Im(f))$. Se tiene $n_0 - 1 = f(k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, de donde $f(k+1) = n_0$ por definición de f. Se deduce, a partir de la biyección f, que A es equipotente con $\mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 0.2.3. Veamos que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para esto basta con considerar la función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La siguiente proposición permite construir más ejemplos. Además, la propiedad (i) dice que todo conjunto infinito contiene una copia de $\mathbb{N}$, es decir que de alguna manera el infinito numerable es el infinito "más chico".

Proposición 0.2.4. *Sea X un conjunto.*

(i) Si X es infinito, entonces existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

(ii) Si existe $f : X \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces X es numerable.

(iii) Si existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva, entonces X es numerable

Demostración. (i) Definimos $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva como sigue

$$f(0) = x, \text{ para cierto } x \in X, f(n+1) \in X - \{f(0), f(1), \cdots, f(n).$$

El hecho de que X sea infinito nos asegura que $X \neq \emptyset$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X - \{f(0), f(1), \cdots, f(n)\} \neq \emptyset$, por lo que la función está bien definida. Es claro que es inyectiva.

(ii) Como f es inyectiva tenemos que $X \simeq f(X)$. Por otro lado $f(X)$ está contenido en $\mathbb{N}$, por lo que es numerable. Luego X también lo es.

(iii) Como f es sobreyectiva, tiene una inversa a derecha que es inyectiva. Por la parte anterior, queda X numerable.

$\square$

Proposición 0.2.5. *Si A y B son numerables, entonces $A \times B$ también lo es.*

Demostración. Observar que si A y B son infinitos, entonces $A \times B$ es equipotente con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probaremos entonces que existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

La inyectividad de esta función está dada por la unicidad de la descomposición en factores primos.
Se deja como ejercicio probar los otros casos (A y/o B finitos). $\square$

De lo anterior puede concluirse que el producto cartesiano de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.
Como consecuencia de la Proposición 0.2.5 tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.2.6. Veamos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. Para esto primero observamos que $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es numerable por la proposición anterior. Luego como la proyección al cociente $\pi : X \to \mathbb{Q}$ es sobreyectiva, podemos utilizar el punto (iii) la Poposición 0.2 para concluir que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Tenemos entonces que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$, que son conjuntos que contienen estrictamente a $\mathbb{N}$, son numerables. Sin embargo existe una diferencia esencial entre estos conjuntos y $\mathbb{R}$, como vemos a continuación.

Proposición 0.2.7. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable.*

Demostración. La prueba que presentamos utiliza una idea conocida como *argumento diagonal de Cantor.*
Si $\mathbb{R}$ fuera numerable, sus subconjuntos también lo serían. Vamos a probar entonces que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es numerable.
Definimos $S \subset [0, 1)$ como el conjunto de números reales cuya expresión decimal sólo utilice ceros y unos. Vamos a ver que no existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to S$.
Sea $f : \mathbb{N} \to S$ función. Tomemos $x \in S$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, en el lugar k después de la coma tenga una cifra (0 o 1) diferente al lugar k después de la coma de $f(k)$. Podemos observar que este x no está en la imagen de f porque para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el lugar k después de la coma de x difiere del lugar k después de la coma de $f(k)$.

Un ejemplo de lo anterior puede verse a continuación:

$$\begin{aligned} f(1) =& 0,01100010100111\ldots \\ f(2) =& 0,01001110010101\ldots \\ f(3) =& 0,10100010010101\ldots \\ f(4) =& 0,00011101010100\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aquí tenemos que el primer lugar después de la coma de $f(1)$ es 0, el segundo lugar después de la coma de $f(2)$ es 1, el tercer lugar despuués de la coma de $f(3)$ es 1, etc. Luego $x = 0,1000\ldots$ no está en la imagen de f. □

Tenemos entonces conjuntos infinitos de “diferentes cardinales”! ($\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ por ejemplo). Podríamos decir que desde el punto de vista de su cardinal, $\mathbb{R}$ es estrictamente más grande que $\mathbb{N}$. A partir de aquí aparecen de forma natural dos preguntas:

- ¿Existe algun conjunto infinito cuyo cardinal esté entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$? Esto podría precisarse de la siguiente forma: ¿Existe un conjunto A que no es equipotente a $\mathbb{N}$ ni a $\mathbb{R}$ y funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : A \to \mathbb{R}$?
- ¿Existen conjuntos infinitos más grandes que $\mathbb{R}$? Es decir: ¿$\mathbb{R}$ se puede inyectar en un conjunto X que no sea equipotente a este?

La teoría de conjuntos no permite responder a la primera pregunta. Esto quiere decir que no puede demostrarse que es cierta ni que es falsa a partir de los axiomas. La segunda pregunta es respondida por el siguiente teorema.

Teorema 0.2.8 (Cantor)**.** *Dada un conjunto X, no existe ninguna función sobreyectiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$.*
(Se deduce que $\mathcal{P}(X)$ no es equipotente con X).

Demostración. Supongamos que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es sobreyectiva. Definimos

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Como f es sobreyectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Nos preguntamos entonces si a pertenece o no a A. Estudiamos las dos opciones:

- Si $a \in A$, entonces por la definición de A se tiene que $a \notin f(a) = A$, lo que es absurdo.
- Si $a \notin A$, entonces $a \notin f(a)$ y por lo tanto $a \in A$, que también es absurdo.

Concluimos entonces que no puede existir dicha función f.

□

Por otra parte, el Teorema de Cantor permite probar que existe una gran cantidad de tamaños diferentes de infinito, es decir que en la lista de conjuntos

$$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))),\ \ldots$$

se tiene que no existe una biyección entre un conjunto y el siguiente, sin embargo siempre existe una función inyectiva. (Se interpreta como que cada conjunto tiene "tamaño.estrictamente mayor que el anterior.)