Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2021

Práctico 5: Cardinalidad

1. Sean A, B conjuntos finitos. Probar que
   a) Si existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de A es menor o igual que la de B.
   b) Si existe una función sobreyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de A es mayor o igual que la de B.
   c) Si existe una biyección $f : A \to B$, entonces A y B tienen la misma cantidad de elementos.

2. Sean A, B conjuntos con n elementos y $f : A \to B$ una función. Probar que son equivalentes:
   - f es inyectiva
   - f es sobreyectiva
   - f es biyectiva

3. Probar que existen dos personas con la misma cantidad de pelos en la cabeza.

4. Probar que dados 5 puntos dentro de un triángulo equilátero de lado 2, existe al menos un par de ellos que están a una distancia menor o igual a 1.

5. Sean T un triángulo y r una recta en el plano. Suponemos que la recta r no pasa por ninguno de los vértices de T. Probar que si r intersecta T, entonces intersecta exactamente dos de sus lados.

6. Probar esta versión más general del principio del palomar: si se meten $n.m + 1$ palomas en n jaulas, entonces hay una jaula que tiene por lo menos $m + 1$ palomas.

7. Probar que si A es finito y B es numerable (finito o infinito), entonces $A \times B$ es numerable.

8. Consideremos una colección de conjuntos $\mathcal{X}$. La relación:

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \text{Existe } f : X \to Y \text{ inyectiva},$$

¿es de orden?

9. Probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un conjunto no numerable.

10.
    a) Sea I un conjunto numerable y $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos numerables. Probar que $\bigcup_{i \in I} X_i$ es numerable.

    b) Probar que el conjunto de todas las soluciones reales de ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, es un conjunto numerable.

    c) Decimos que un número real $x \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si es raíz real de un polinomio con coeficientes racionales (de cualquier grado). Notamos por $\mathcal{A}$ al conjunto de los número algebraicos. Probar que $\mathcal{A}$ es numerable y que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathbb{R}$.