Imágenes por Resonancia Magnética 2021

Práctico IV – Momento angular en Mecánica Cuántica

Ejercicio 1

a) Pruebe que para una partícula en un potencial *V(**r**)* la tasa de cambio del valor esperado del momento angular orbital $\boldsymbol{L}$ es igual al valor esperado del torque:

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{L} \rangle = \langle \boldsymbol{N} \rangle$$

donde $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times (-\nabla V)$
(este es el análogo rotacional de las ecuaciones clásicas usando el teorema de Ehrenfest.)

b) Muestre que para cualquier potencial con simetría esférica: $d\langle \boldsymbol{L} \rangle/dt = 0$. Ésta es una forma en la que, en mecánica cuántica, se manifiesta la conservación del momento angular.

Ejercicio 2

Dos partículas de masa *m* están unidas a los extremos de una varilla rígida sin masa y de longitud a. El sistema puede rotar libremente en torno a su centro en tres dimensiones (el centro está fijo).

a) Muestre que las energías permitidas para éste rotor rígido son:

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{ma^2}, \text{ para } l = 0, 1, 2, \dots$$

Sugerencia: Exprese primeramente la energía clásica en términos del momento angular total.

b) ¿Cuáles son las funciones propias normalizadas para éste sistema? ¿Cuál es la degeneración del nivel de energía *l*?

c) Calcule el espectro de rotación para fotones emitidos/absorbidos por este sistema. Haga una estimación para moléculas reales, y compare con kT para diversas temperaturas.

Ejercicio 3

Considere un electrón en el estado de espín: $\chi = A\binom{3i}{4}$.

a) Determine la constante de normalización *A*.

b) Encuentre los valores esperados para S_x, S_y y S_z.

c) Encuentre las incertidumbres σ_{Sx}, σ_{Sy} y σ_{Sz}. (aquí sigma designa una desviación estándar, no las matrices de Pauli).

d) Confirme que sus resultados son compatibles con los tres principios de incertidumbre.

Ejercicio 4

Para la forma más general del spinor χ, calcule $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$, $\langle S_x^2 \rangle$, $\langle S_y^2 \rangle$, y $\langle S_z^2 \rangle$. Verifique que $\langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle = \langle S^2 \rangle$.

Ejercicio 5

Construya la matriz $\boldsymbol{S}_r$ que representa el componente de momento angular de spin en torno a una dirección arbitraria $\hat{r}$. Use las coordenadas esféricas para las cuales:

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}.$$

Encuentre los valores propios y autoestados normalizados de $\boldsymbol{S}_r$.

Respuestas:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\varphi}\sin\theta/2 \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Tenga en cuenta que las respuestas pueden diferir por un factor de fase $e^{i\varphi}$.

Calcule el valor medio de S_z y S^2 en este estado.

Ejercicio 6

a) Pruebe el teorema de virial en tres dimensiones:

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle$$

para estados estacionarios. *Sugerencia*: refiérase al ejercicio 6.

b) Aplique el teorema de virial al caso del hidrógeno, y muestre que:

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n.$$

c) Aplique el teorema de virial al oscilador armónico en tres dimensiones, y muestre que en éste caso:

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2.$$

Ejercicio 7

Considere un electrón que se encuentra en el estado de espín:

$$\chi = A\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine la constante A normalizando χ.

b) Si se mide S_z en éste electrón ¿qué valores se podrían obtener? ¿cuál es la probabilidad de obtener cada uno? ¿cuál es el valor esperado de cada uno?

c) Responda a las mismas preguntas que en la parte b) para S_x y S_y.

Ejercicio 8

Deducción de autovalores y autovectores de momento angular. Considere un operador de momento angular definido por la relación de conmutación $[J_a, J_b] = i\,\varepsilon_{abc}\,\hbar\,J_c$, con *a, b, c = 1, 2, 3*.

a) Demuestre $[J^2, J_a] = 0$.

b) Demuestre que $\sigma_{Jx}\sigma_{Jy} \geq \frac{\hbar}{2}|\langle J_z\rangle|$ dónde $\sigma^2 = \langle (J - \langle J\rangle)^2\rangle$.

c) Calcule $[J^2, J_\pm]$ y $[J_z, J_\pm]$ con $J_\pm = J_x \pm iJ_y$.

d) Sean λ, μ autovalores de J^2 y J_z respectivamente. Muestre que $\lambda \geq \mu^2$.

e) Muestre que existe un estado $|f_t\rangle$ tal que $J_+|f_t\rangle = 0$.

f) Sea $\hbar j$ el autovalor de $|f_t\rangle$ con J_z, muestre que el autovalor de $|f_t\rangle$ con J^2 es $\hbar^2 j(j+1)$.

g) Muestre que también existe un estado $|f_b\rangle$ tal que $J_-|f_b\rangle = 0$.

h) Sea $\hbar\bar{j}$ el autovalor de $|f_b\rangle$ para J_z. Muestre que $\bar{j} = -j$.

i) Deduzca que $j = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

j) Demuestre que $J^2 = J_\pm J_\mp + J_z^2 \mp \hbar J_z$ y consecuentemente, $J_\pm|j, m_j\rangle = A_{j,m_j}|j, m_j \pm 1\rangle$ con $A_{j,m_j} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)}$.

k) Para s=1/2, use los operadores de subida y bajada para obtener la matriz que representa a los mismos, y deduzca las matrices de los operadores S_z, S_x, S_y en la base de autoestados comunes de S^2 y S_z.

l) Idem para s=1 y s=3/2.

m) Escriba las matrices para un espín s, $S_\pm, S_z, S_x, S_y$ usando las expresiones anteriores para un momento angular j en función de A_{j,m_j}.