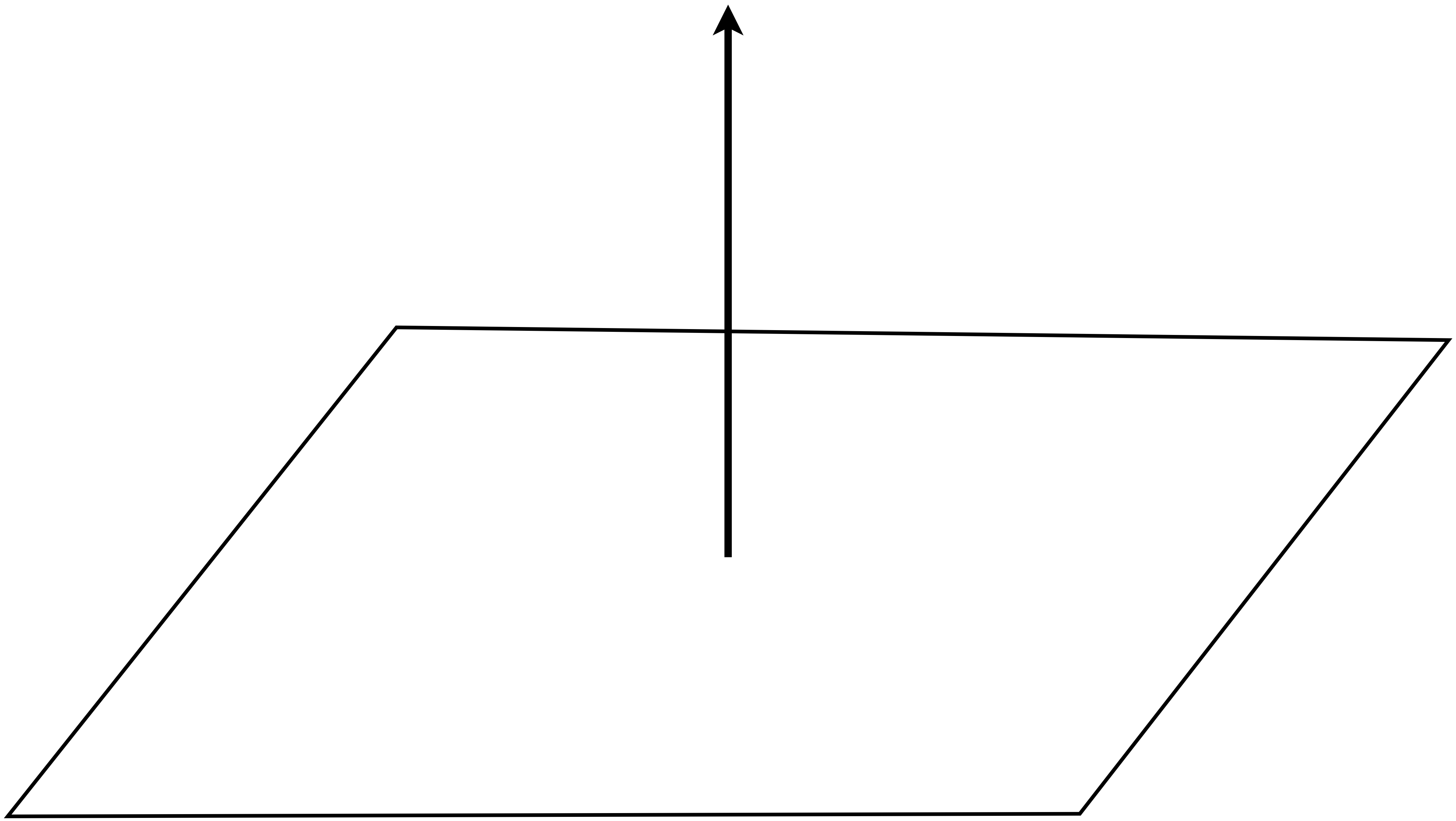
Astronomía Fundamental 2020

o Astronomía en tiempos del Coronavirus

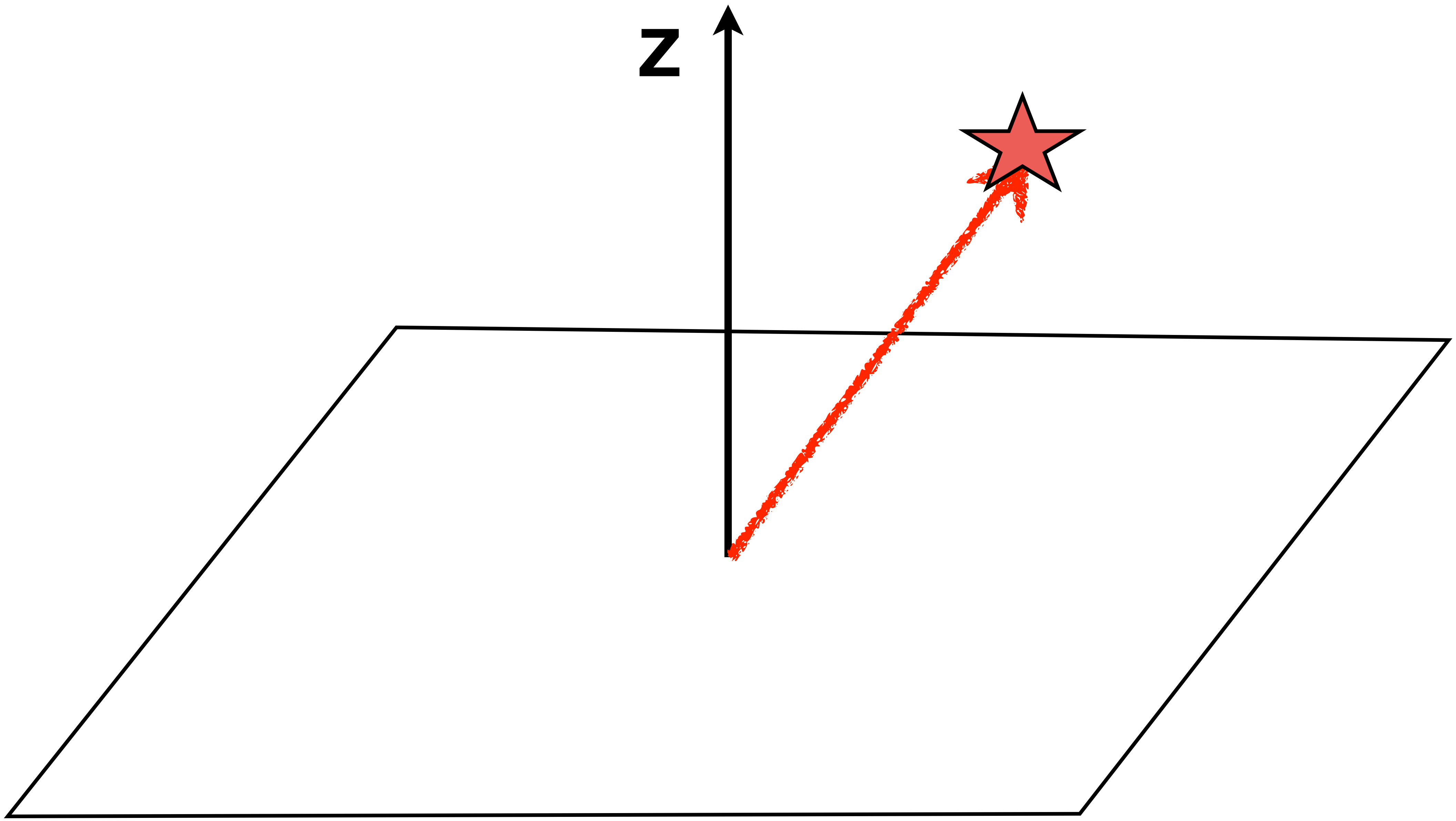
Clase 2: Elementos de Trigonometría Esférica - II
25/03/2020

Licenciatura en Astronomía - Fac. de Ciencias, UdelaR
3º Semestre - 2020
Teórico: Cecilia Mateu
Práctico: Bruno Domínguez

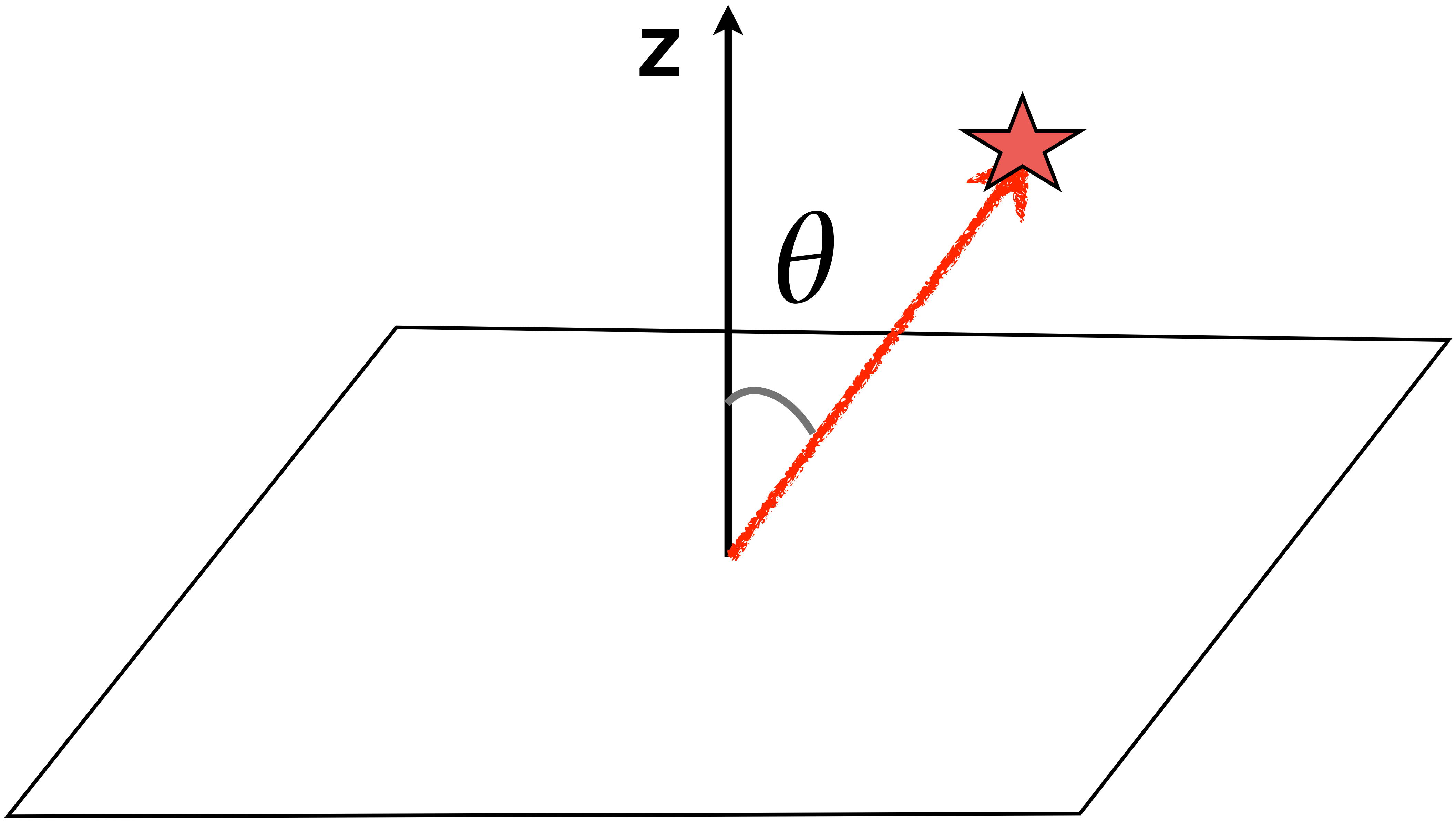
Definición de un sistema de coordenadas



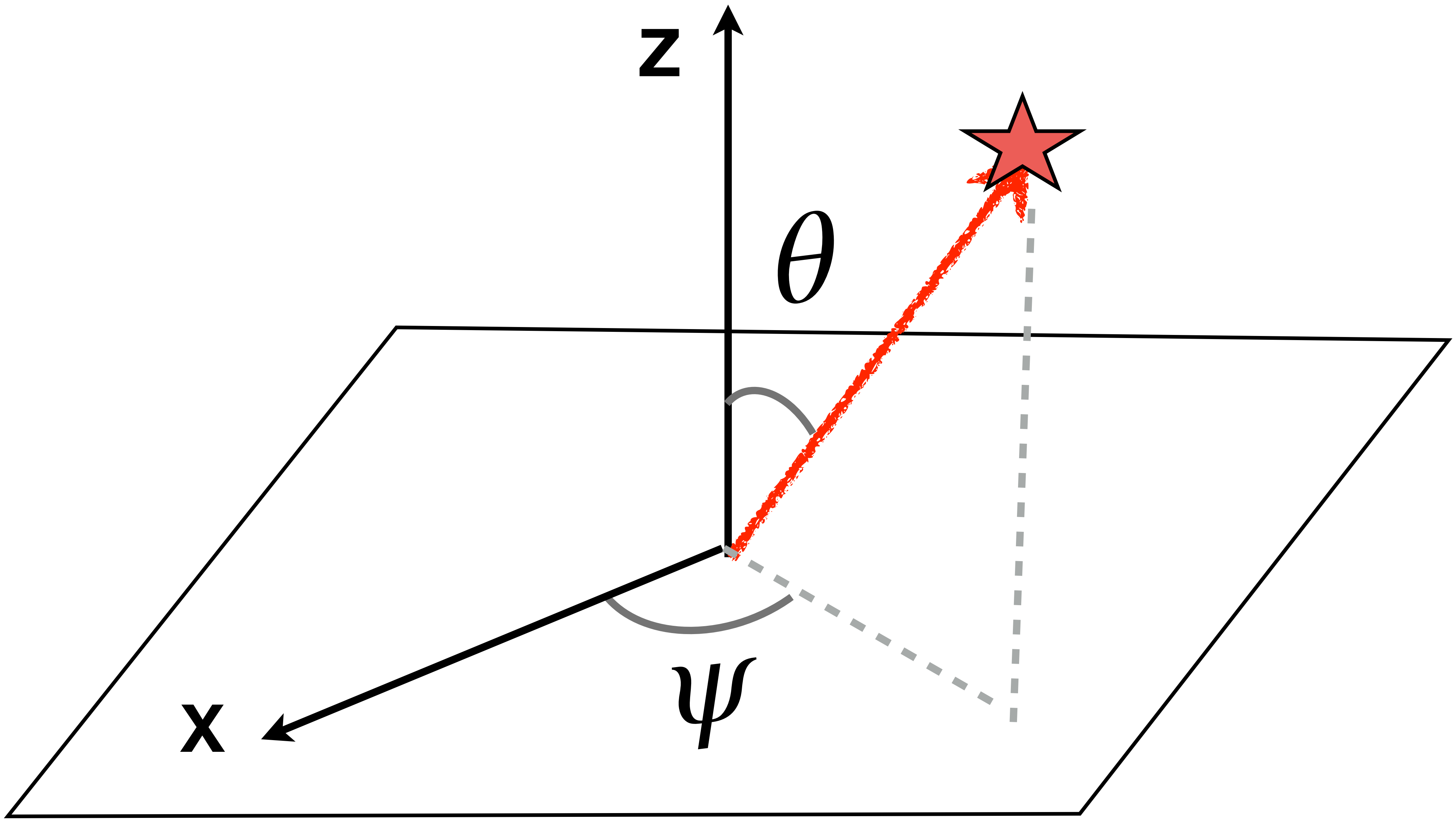
Sistema de coordenadas esféricas (o polares)



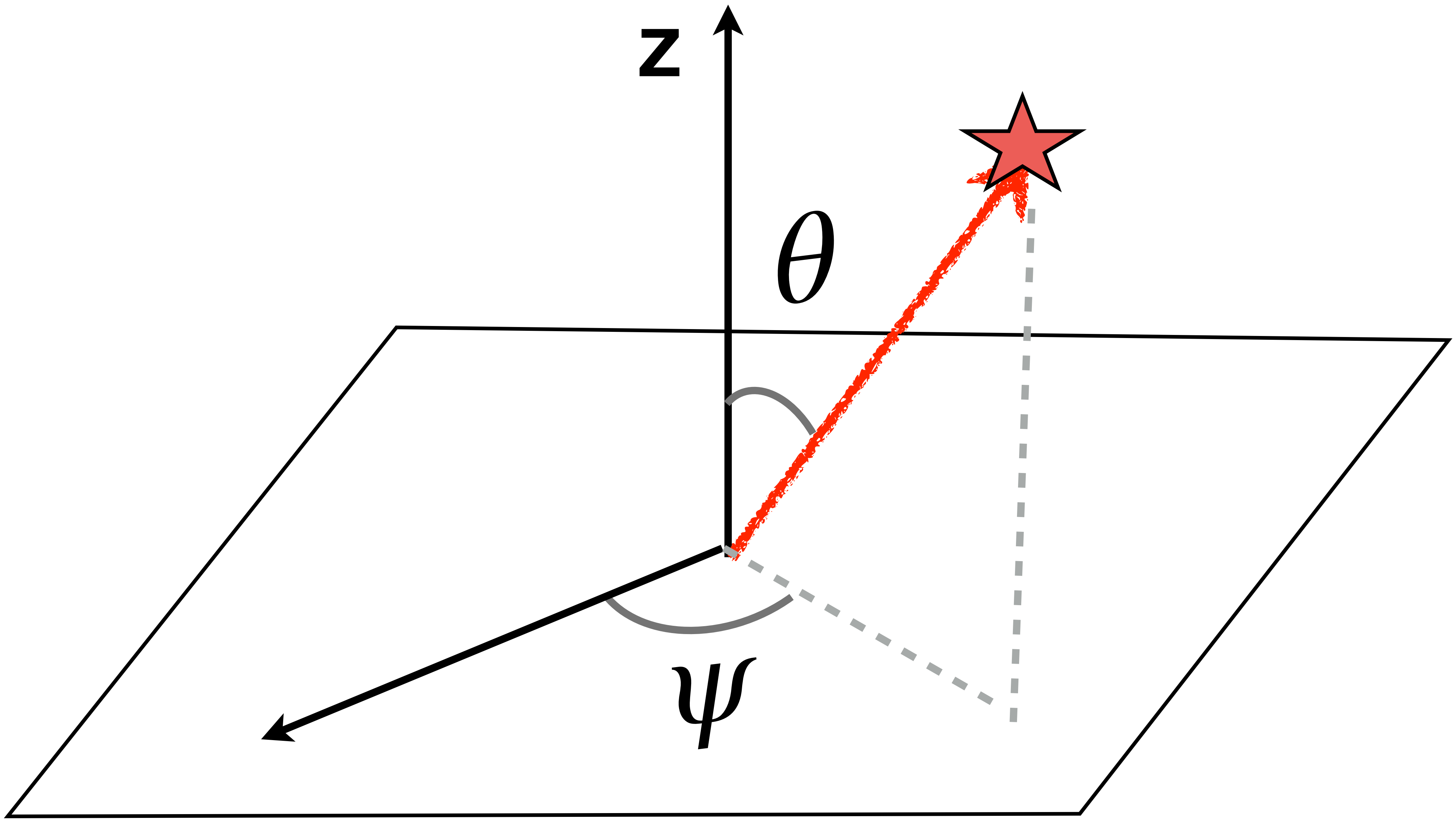
Sistema de coordenadas esféricas (o polares)



Sistema de coordenadas esféricas (o polares)



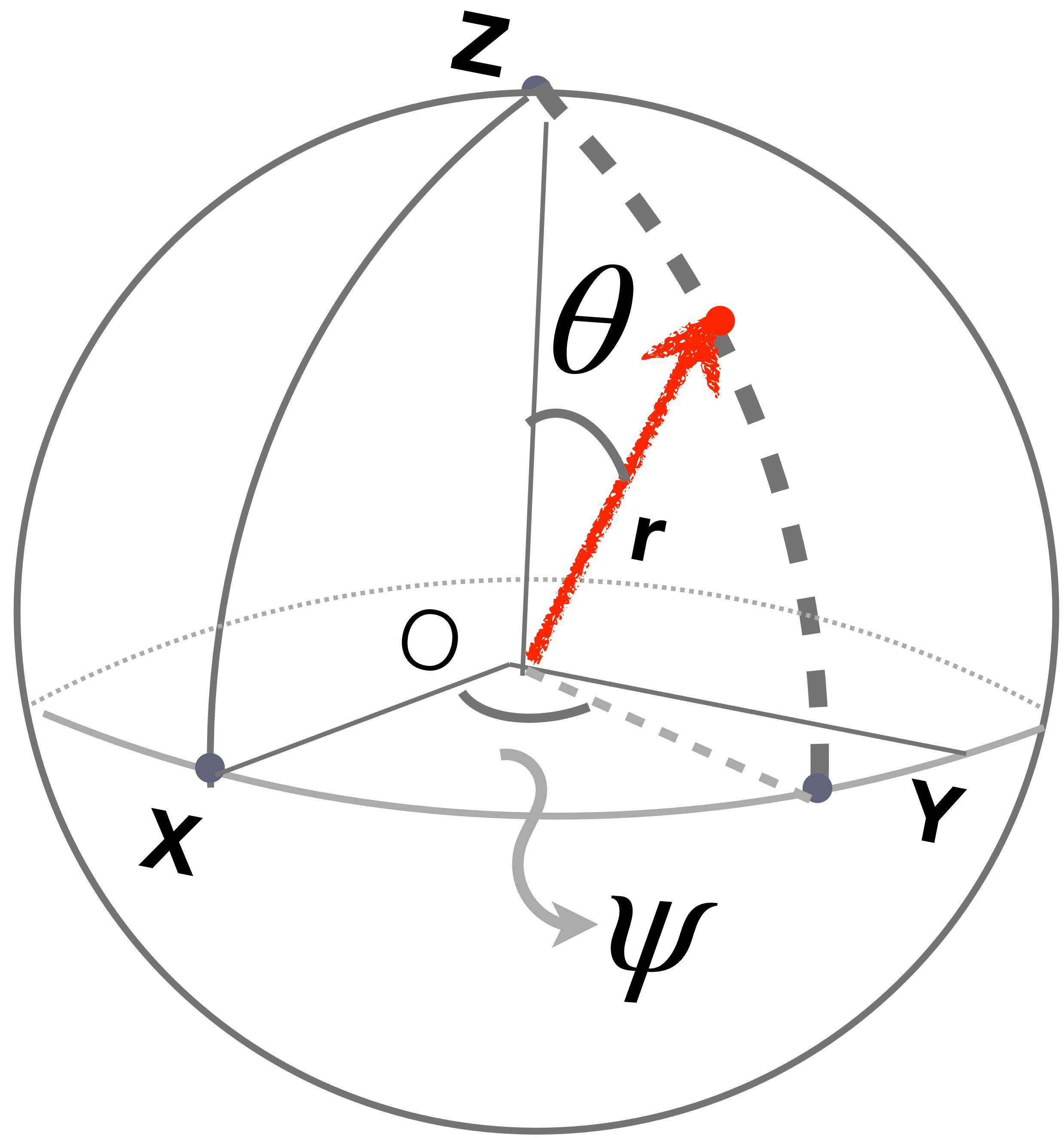
Sistema de coordenadas esféricas (o polares)



$$(\theta, \psi, r)$$

Coordenadas Esféricas (o Coordenadas Polares)

- XY: plano fundamental
- Círculo máximo de referencia XZ (ψ=0º)
- **Ángulo Polar (Colatitud) (0º≤θ≤π)**
- **Acimut (0º≤ψ≤2π):**
  - es el ángulo diedro entre el plano de referencia XZ y el que pasa por el obj.



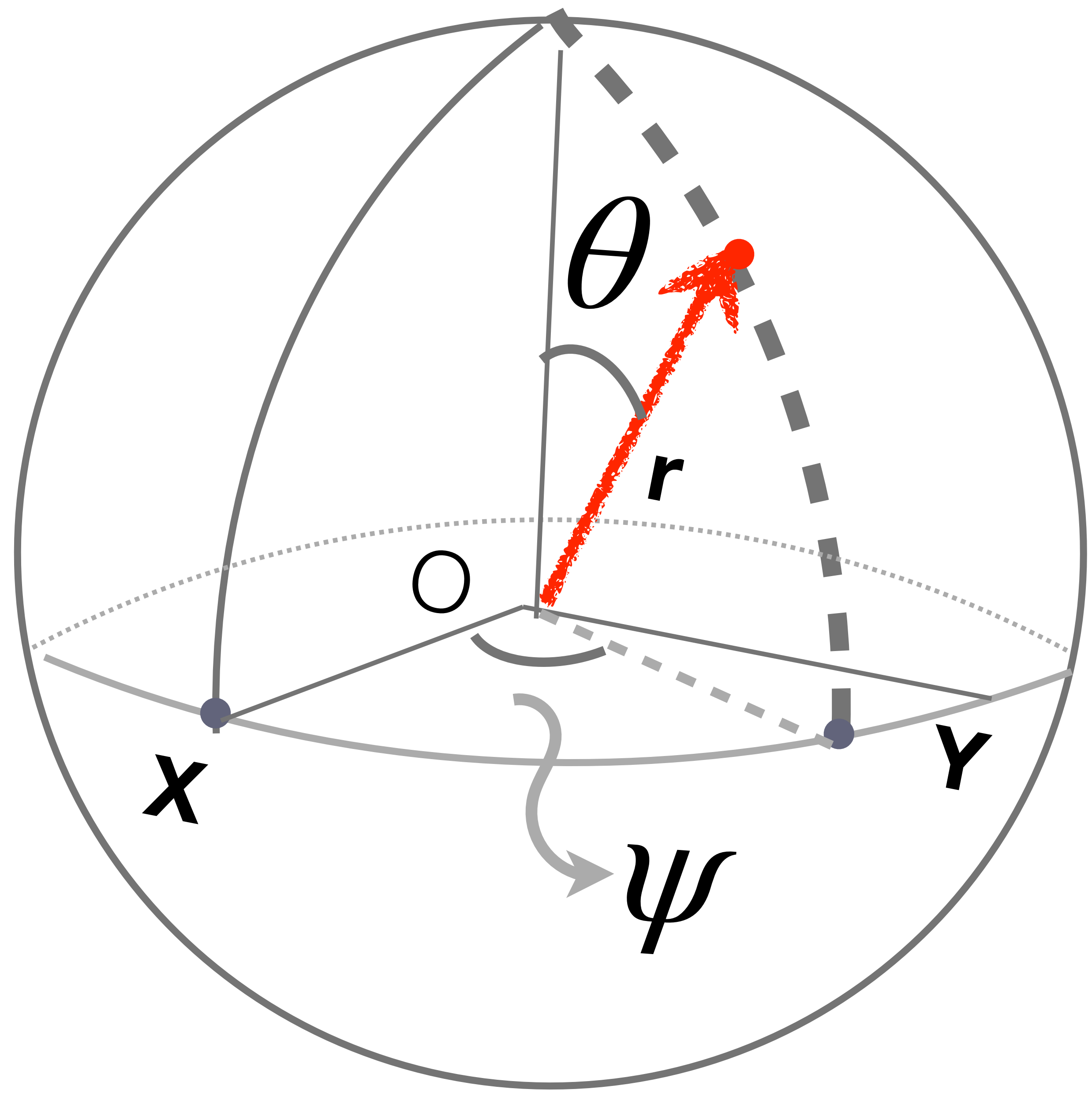
Coordenadas Esféricas (o Coordenadas Polares)

- Coordenadas rectangulares (o cartesianas):

$$Z = r\cos\theta$$

$$X = r\sin\theta\cos\psi$$

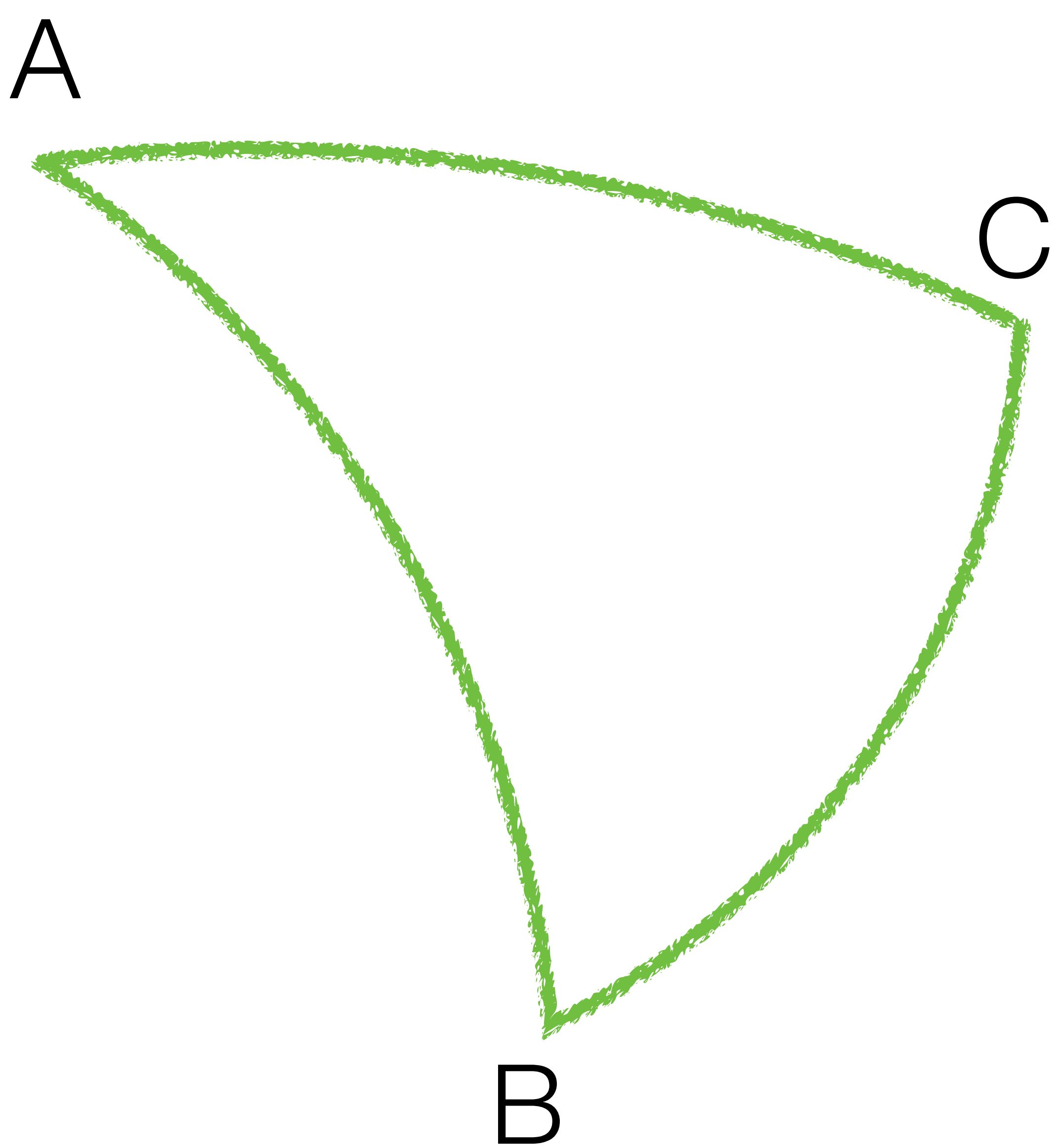
$$Y = r\sin\theta\sin\psi$$



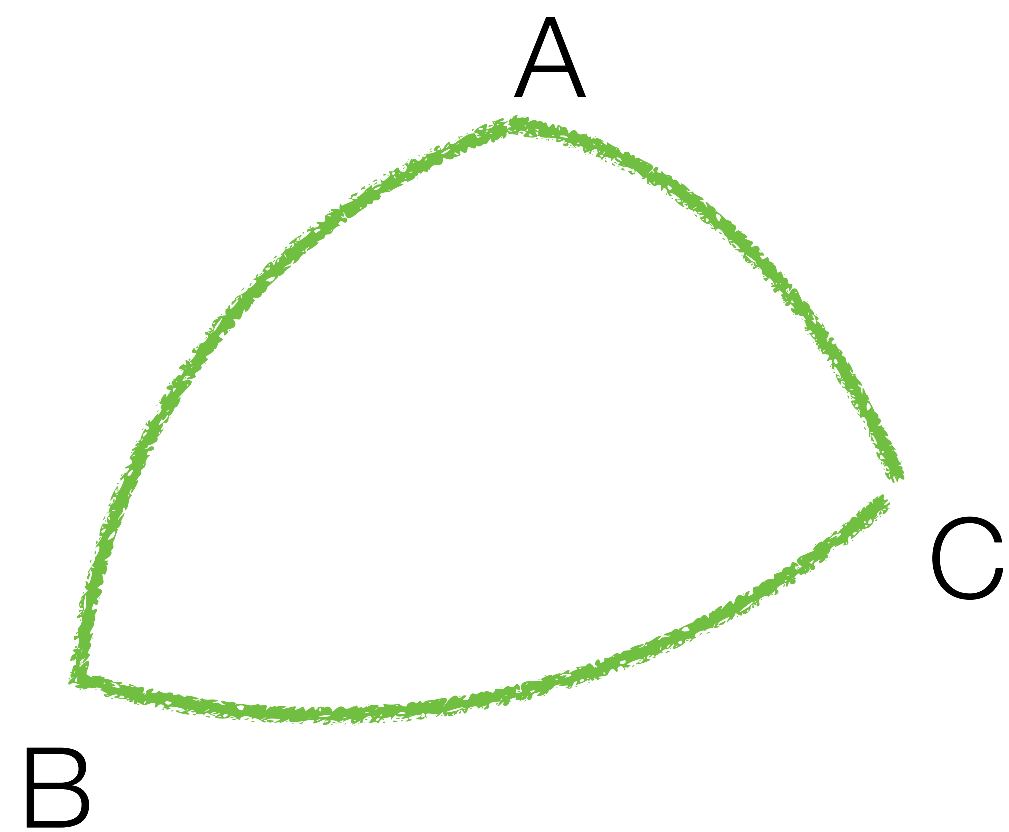
Fórmulas Básicas

Fórmula del coseno

- Tomemos un triángulo cualquiera

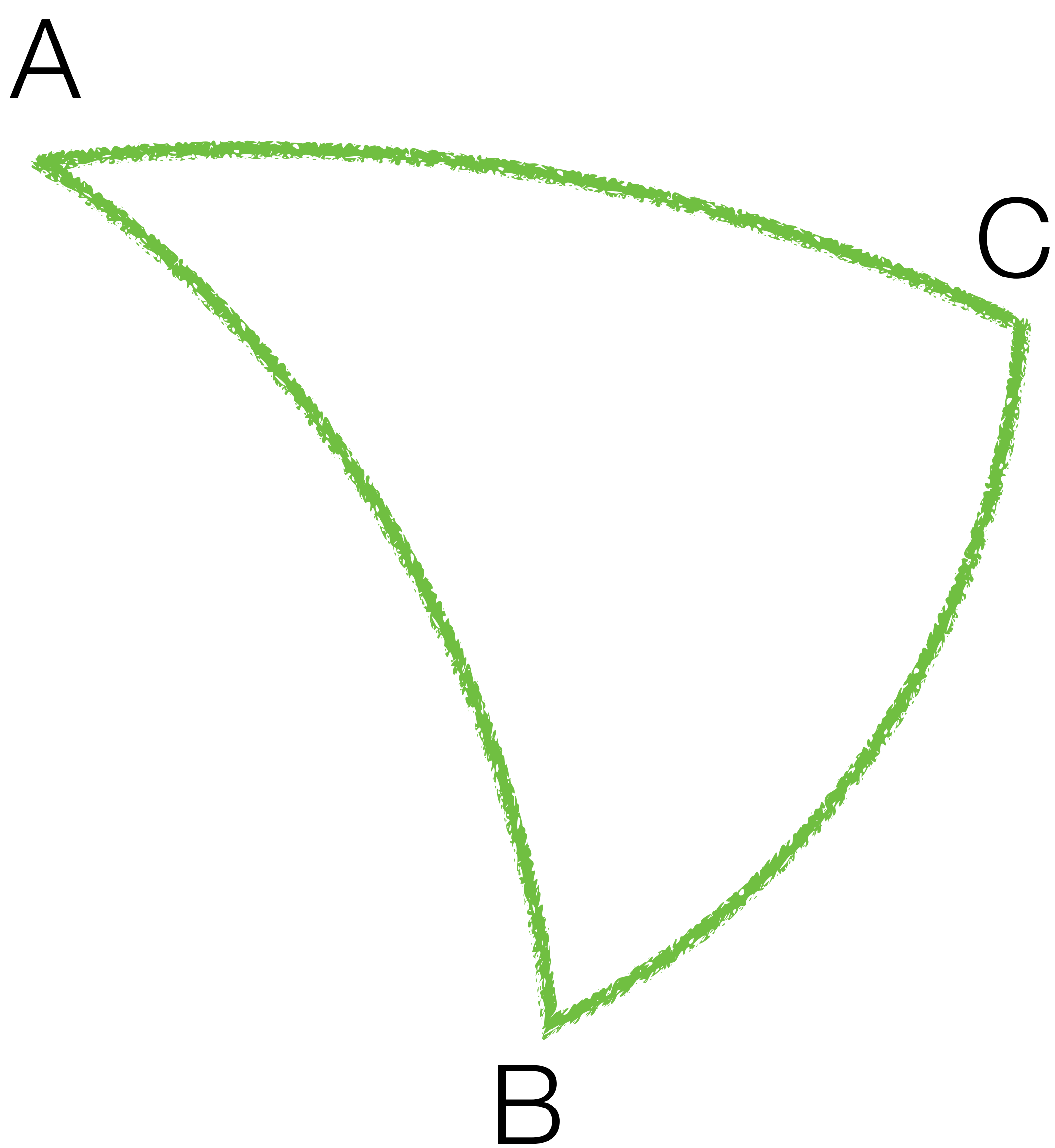


- Definamos un sistema de coordenadas tal que:
  - A sea el polo (eje z)
  - y AB el plano de referencia

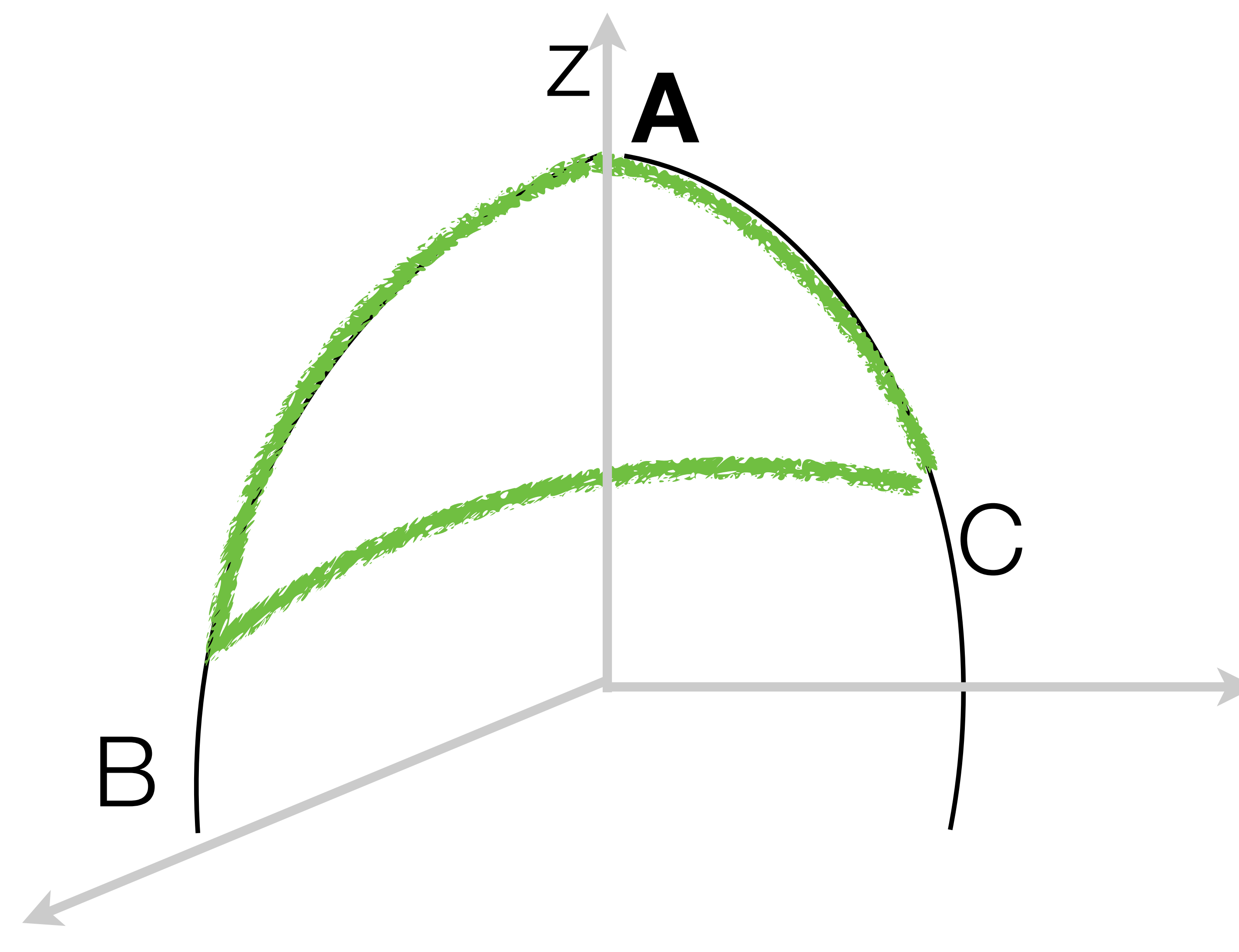


Fórmula del coseno

- Tomemos un triángulo cualquiera



- Definamos un sistema de coordenadas tal que:
  - A sea el polo (eje z)
  - y AB el plano de referencia



Fórmula del coseno

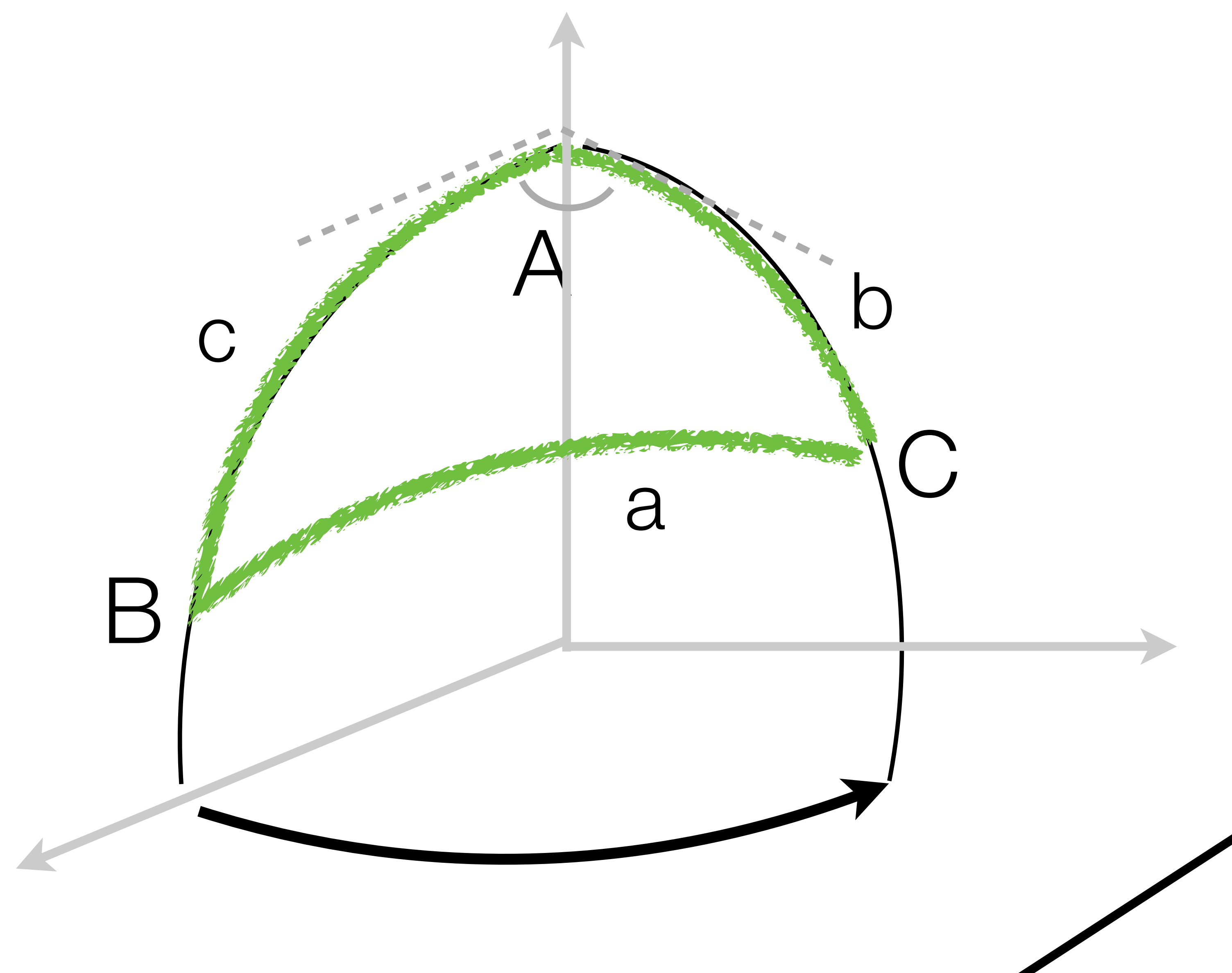
- En este sistema:

A: $\theta =$ $\psi =$

B: $\theta =$ $\psi =$

C: $\theta =$ $\psi =$

- Definamos un sistema de coordenadas tal que:
  - A sea el polo (eje z)
  - y AB el plano de referencia



Fórmula del coseno

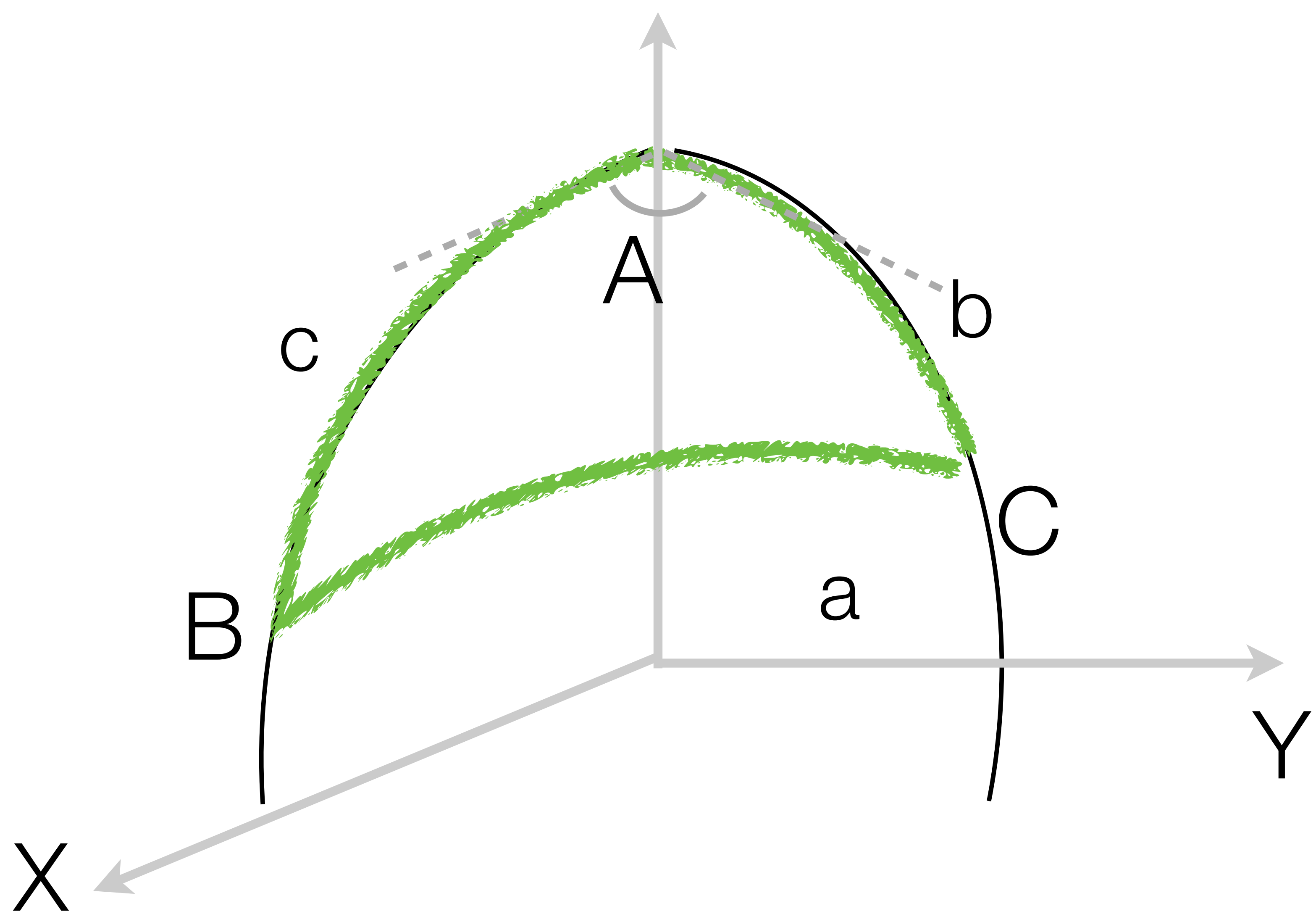
- En este sistema:

A: $\theta = 0 \quad \psi = 0$

B: $\theta = c \quad \psi = 0$

C: $\theta = b \quad \psi = A$

- Definamos un sistema de coordenadas tal que:
  - A sea el polo (eje z)
  - y AB el plano de referencia



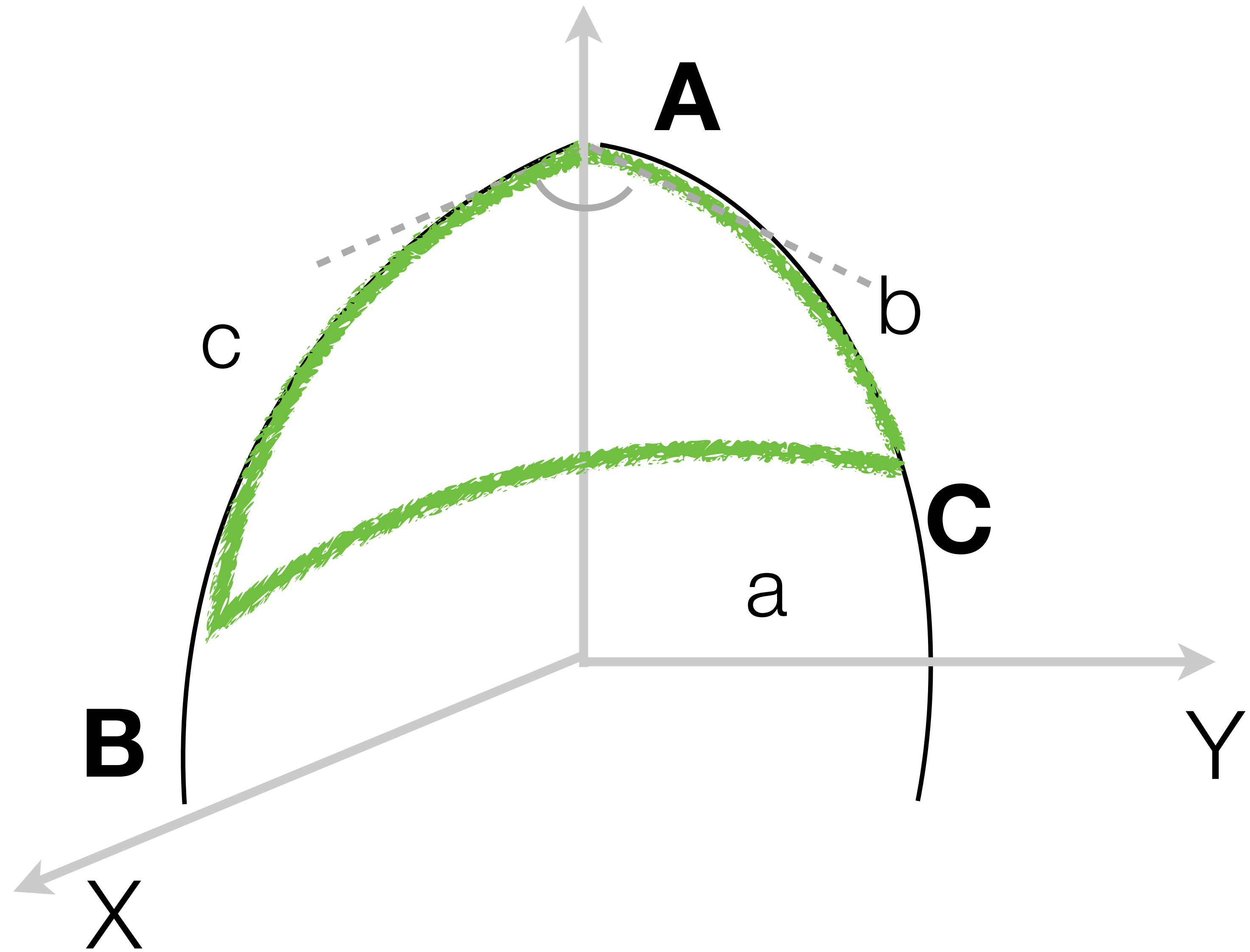
Fórmula del coseno

A: $\theta = 0 \quad \psi = 0$

B: $\theta = c \quad \psi = 0$

C: $\theta = b \quad \psi = A$

- escribamos los radio-vectores en coordenadas cartesianas

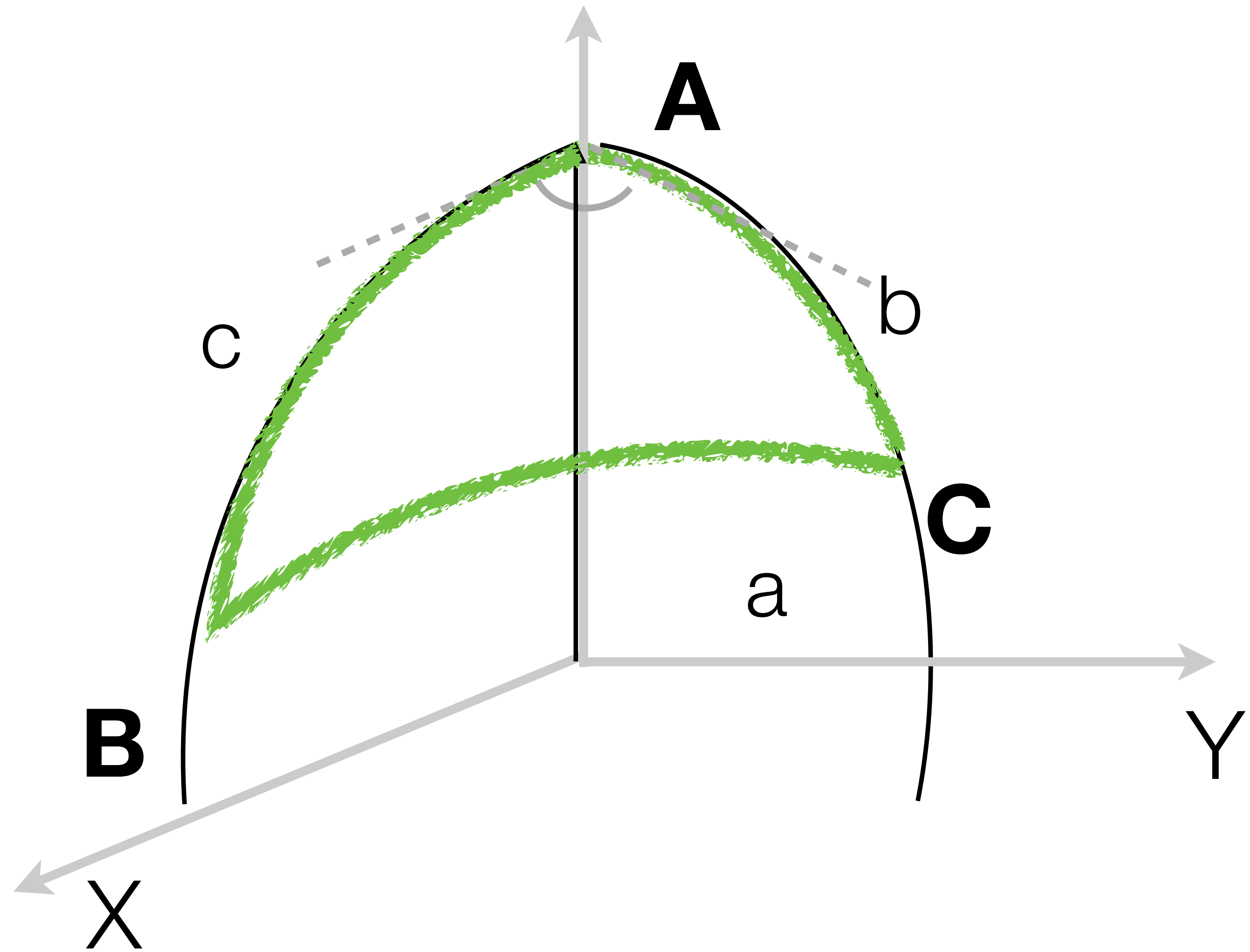


Fórmula del coseno

A: $\theta = 0 \quad \psi = 0$

B: $\theta = c \quad \psi = 0$

C: $\theta = b \quad \psi = A$



- escribamos los radio-vectores en coordenadas cartesianas (X,Y,Z):

$$\hat{r}_A = (\quad , \quad , \quad)$$

$$\hat{r}_B = (\quad , \quad , \quad)$$

$$\hat{r}_C = (\quad , \quad , \quad)$$

$$X = r \sin\theta \cos\psi$$

$$Y = r \sin\theta \sin\psi$$

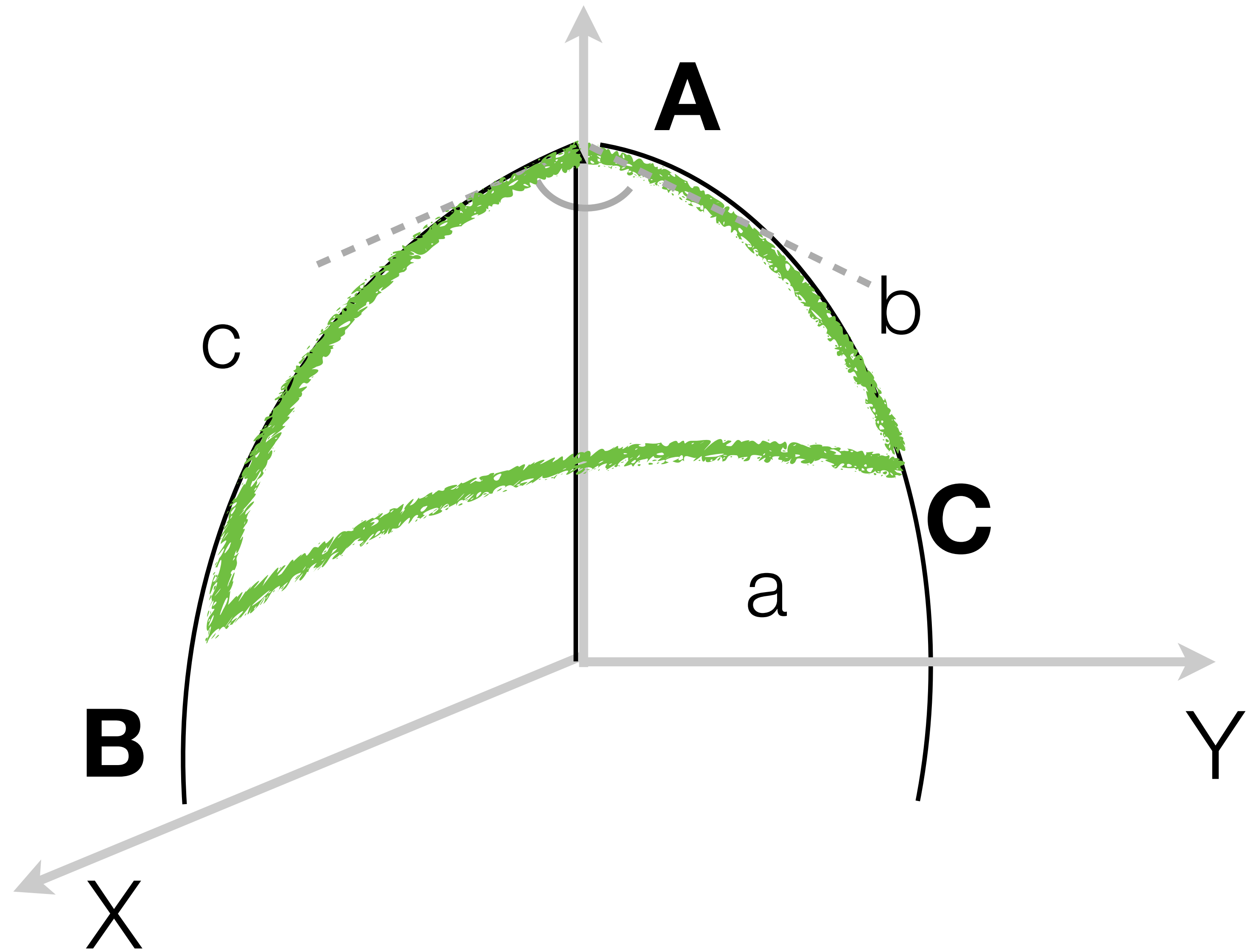
$$Z = r \cos\theta$$

Fórmula del coseno

A: $\theta = 0 \quad \psi = 0$

B: $\theta = c \quad \psi = 0$

C: $\theta = b \quad \psi = A$



- escribamos los radio-vectores en coordenadas cartesianas (X,Y,Z):

$\hat{r}_A =$ (0, 0, 1)

$\hat{r}_B =$ (sinc, 0, cosc)

$\hat{r}_C =$ (sinbcosA, sinbsinA, cosb)

$$X = r \sin\theta \cos\psi$$

$$Y = r \sin\theta \sin\psi$$

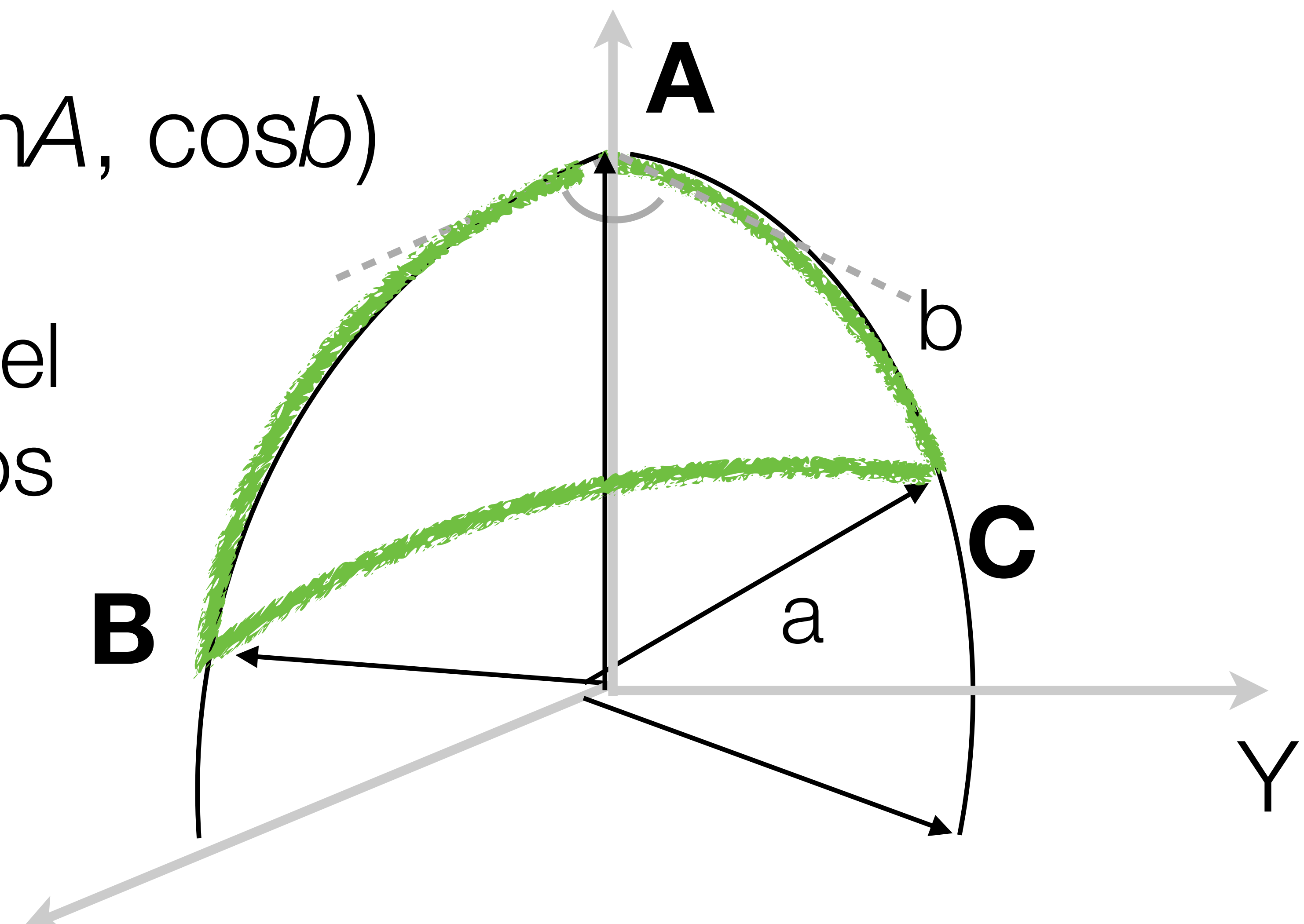
$$Z = r \cos\theta$$

Fórmula del coseno

$$\hat{r}_A = (\,0,\,0,\,1)$$

$$\hat{r}_B = (\,\sin c,\,0,\,\cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\,\sin b \sin A,\,\cos b)$$



Recordemos la relación del producto escalar entre dos vectores con el ángulo entre éstos:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

Fórmula del coseno

$$\hat{r}_A = (0, 0, 1)$$

$$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$

Así que tenemos:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

Desarrollemos el producto escalar entre B y C:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = x_B x_C + y_B y_C + z_B z_C$$

Fórmula del coseno

$$\hat{r}_A = (\,0,\,0,\,1)$$

$$\hat{r}_B = (\,\sin c,\,0,\,\cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b\cos A,\,\sin b\sin A,\,\cos b)$$

Así que tenemos:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

y:
$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = x_B x_C + y_B y_C + z_B z_C$$

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C =$$

Fórmula del coseno

$\hat{r}_A = (0, 0, 1)$

$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$

$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$

Así que tenemos:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

y:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = x_B x_C + y_B y_C + z_B z_C$$

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C =$$

Fórmula del coseno

$$\hat{r}_A = (0, 0, 1)$$

$$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$

Así que tenemos:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

y: $$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = x_B x_C + y_B y_C + z_B z_C$$

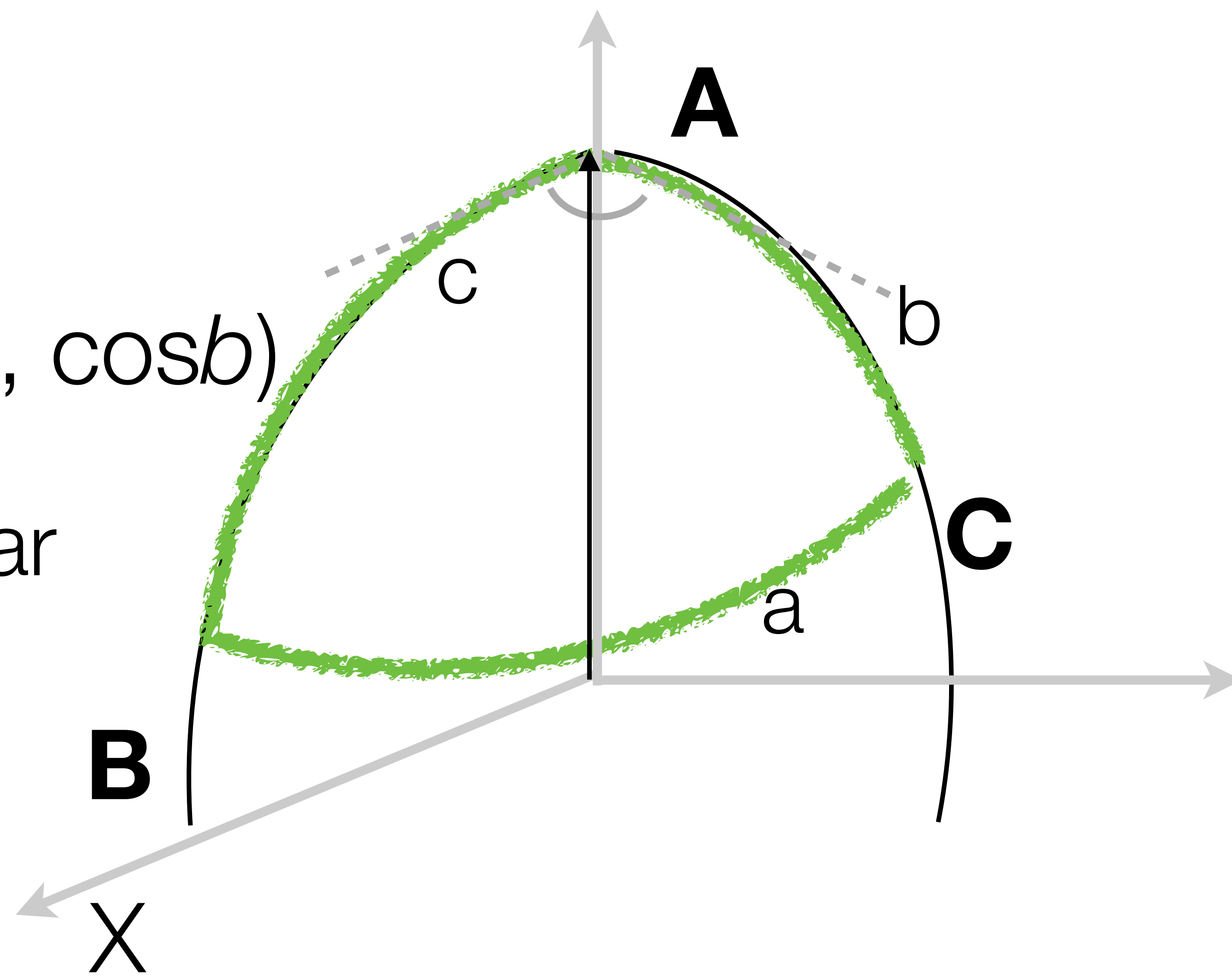
$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

Fórmula del coseno

$$\hat{r}_A = (0, 0, 1)$$

$$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$



Hagamos el producto escalar entre B y C:

$$\hat{r}_B \cdot \hat{r}_C = \cos a$$

así tenemos

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

Regla (o Fórmula) del Coseno

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

Regla del coseno

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

y ¿para b y c?

conseguimos las fórmulas correspondientes mediante permutaciones cíclicas de los ángulos abc

Breve inciso sobre permutaciones cíclicas

- Las siguientes son permutaciones cíclicas de abc

a b c   c a b   b c a

- para a teníamos:

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

- Así, tenemos para b:

Breve inciso sobre permutaciones cíclicas

- Las siguientes son permutaciones cíclicas de abc

a b c   c a b   **b c a**

- para a teníamos:

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

- Así, tenemos para b:

$$\cos b = \sin a \sin c \cos B + \cos a \cos c$$

Regla del coseno

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

Para b y c se consiguen con permutaciones cíclicas

TS: Demostrar para cosb y cosc siguiendo el procedimiento que hicimos para *cosa*

TS= Tarea sugerida o recomendada. No es para entregar.

Regla del coseno

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

Para b y c se consiguen con permutaciones cíclicas

NOTA: todas las fórmulas básicas de la trigonometría esférica se derivan de la fórmula del coseno

Triángulos Esféricos: Regla del Coseno y del Seno

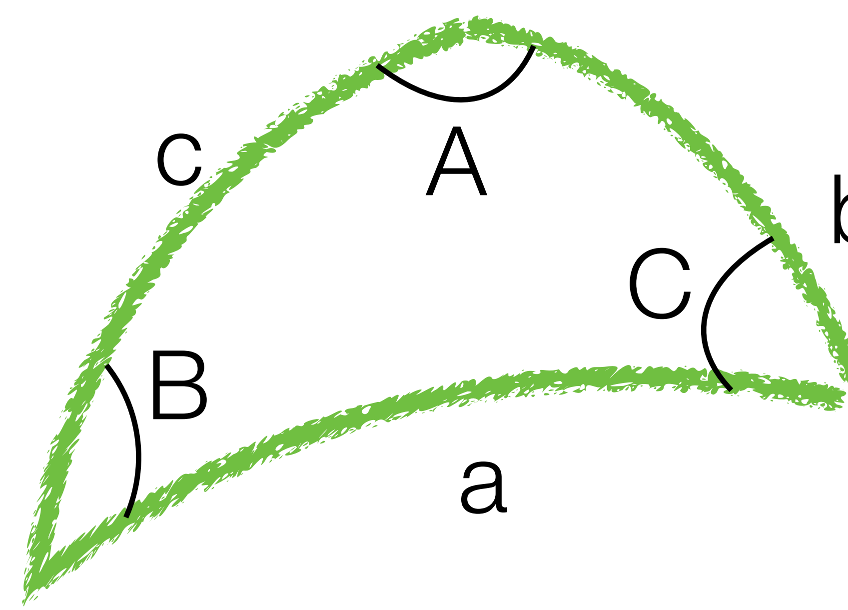
ya demostramos la Regla del coseno:

$$\boxed{\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b}$$

además tenemos la Regla del seno:

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}}$$

(demostración más adelante)

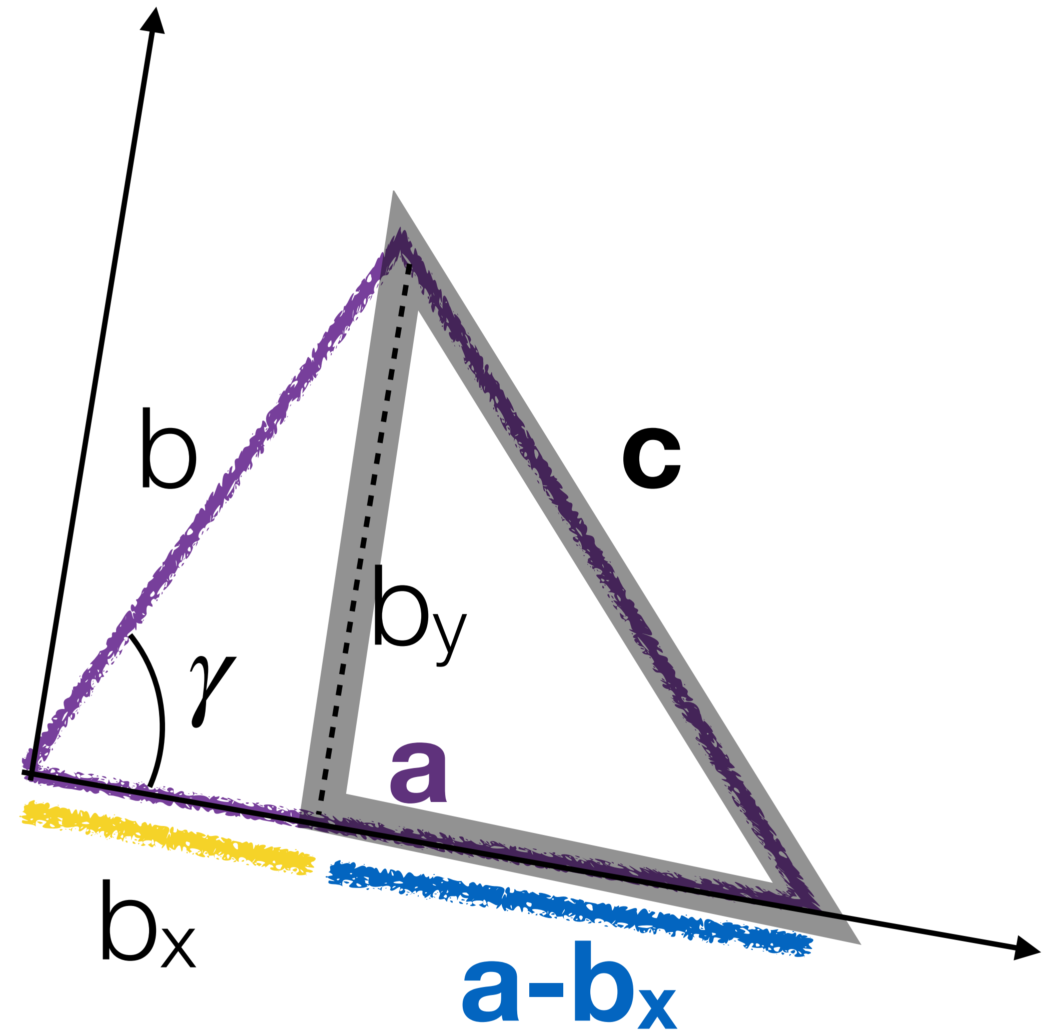


Recordatorio - Regla del Coseno en △ plano

- También hay una regla del coseno para triángulos planos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\gamma$$

$$(a - b_x)^2 + b_y^2 = c^2$$



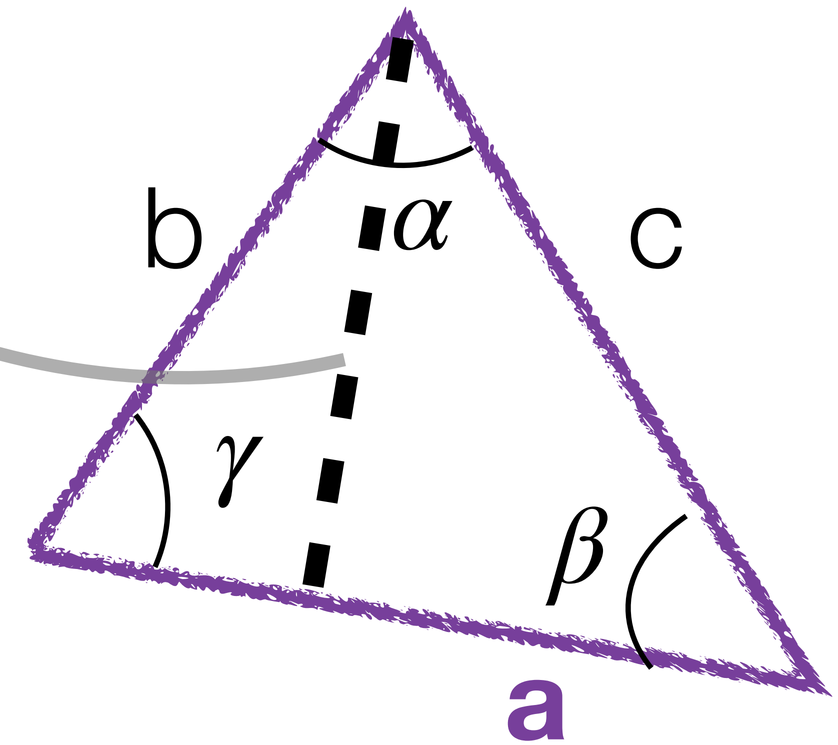
$$(a - b\cos\gamma)^2 + b^2\sin^2\gamma = c^2$$

$$a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + b^2\sin^2\gamma = c^2$$

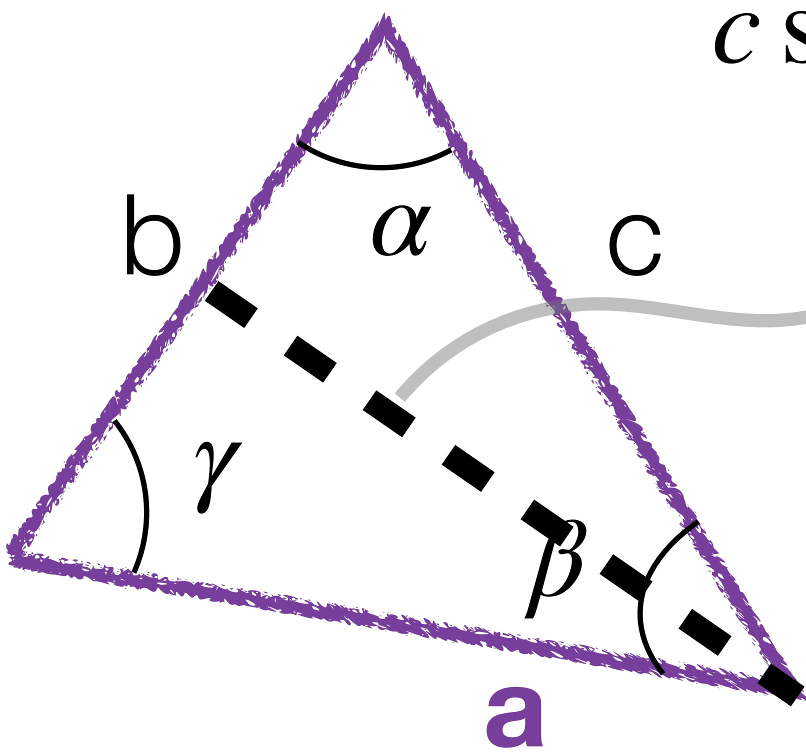
$$\boxed{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2 = c^2}$$

Regla del Seno - Triángulos Planos

$$c \sin\beta = b \sin\gamma$$



$$c \sin\alpha = a \sin\gamma$$



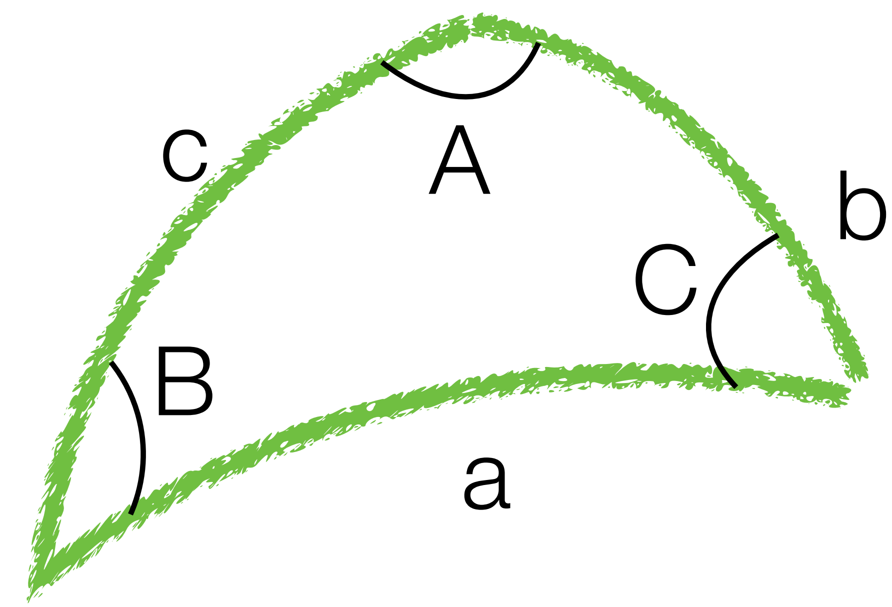
- así tenemos la Regla del Seno para triángulos ***planos***:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

Resumen

Fórmula del Seno - Triángulos Esféricos

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$



Fórmula del coseno - Triángulos Esféricos

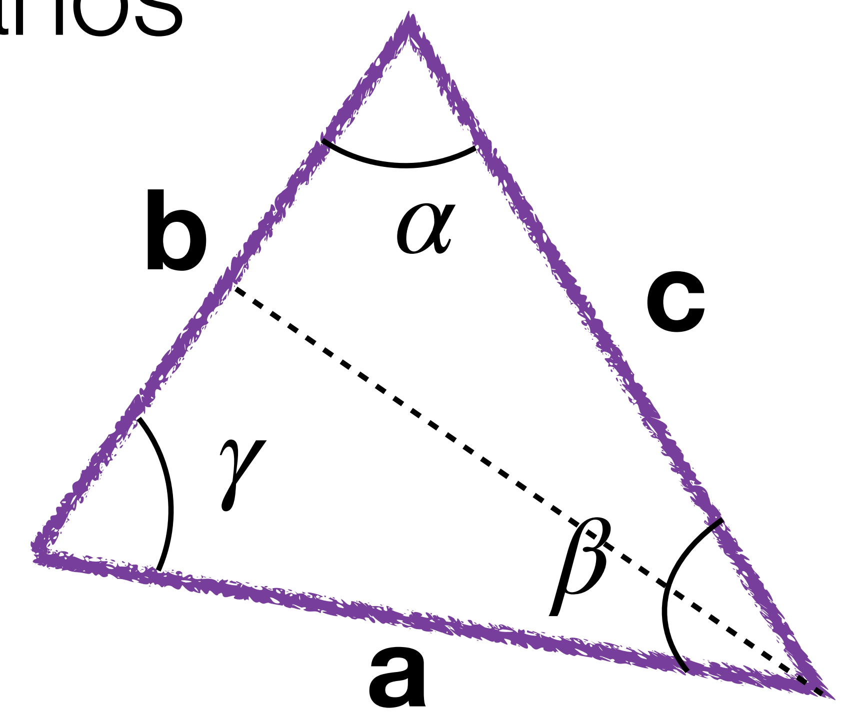
$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

$$\cos b = \sin a \sin c \cos B + \cos a \cos c$$

$$\cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b$$

Fórmula del Seno - Triángulos Planos

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Fórmula del coseno - Triángulos Planos

$$b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 = a^2$$

$$a^2 - 2ac\cos\beta + c^2 = b^2$$

$$a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2 = c^2$$

y algunas identidades trigonométricas útiles

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Seno y coseno de la suma:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

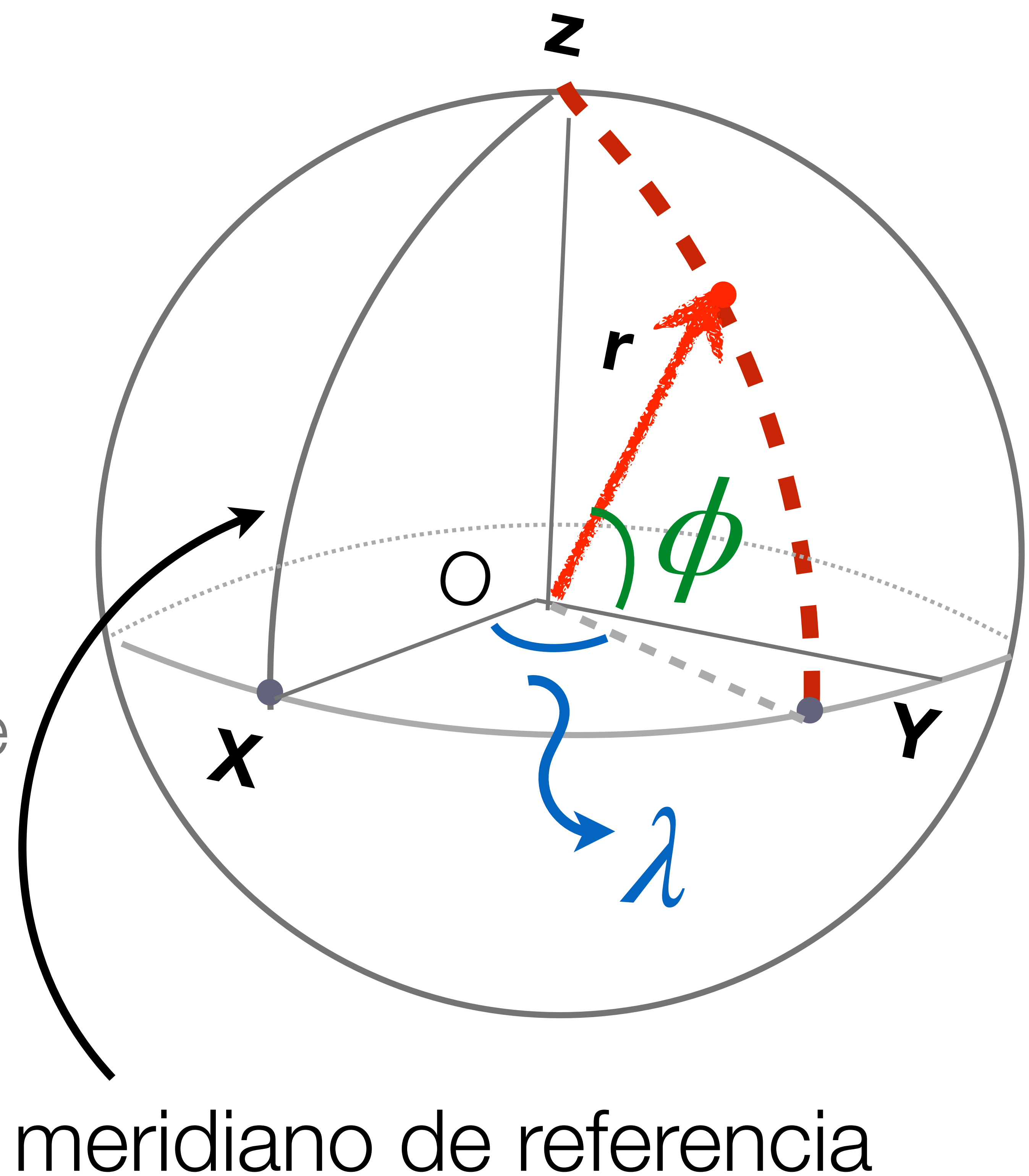
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Sistemas de Coordenadas

Coordenadas Esféricas (versión astronómica/geod.)

- XY: plano fundamental
- Círculo máximo de referencia XZ (ϕ=0º)
- **Latitud** (-90º≤ϕ≤+90º)

- **Acimut o Longitud** (0º≤λ≤360º):
  - es el ángulo diedro entre el meridiano o plano de referencia XZ y el que pasa por el obj.



Coordenadas Esféricas (versión astronómica/geod.)

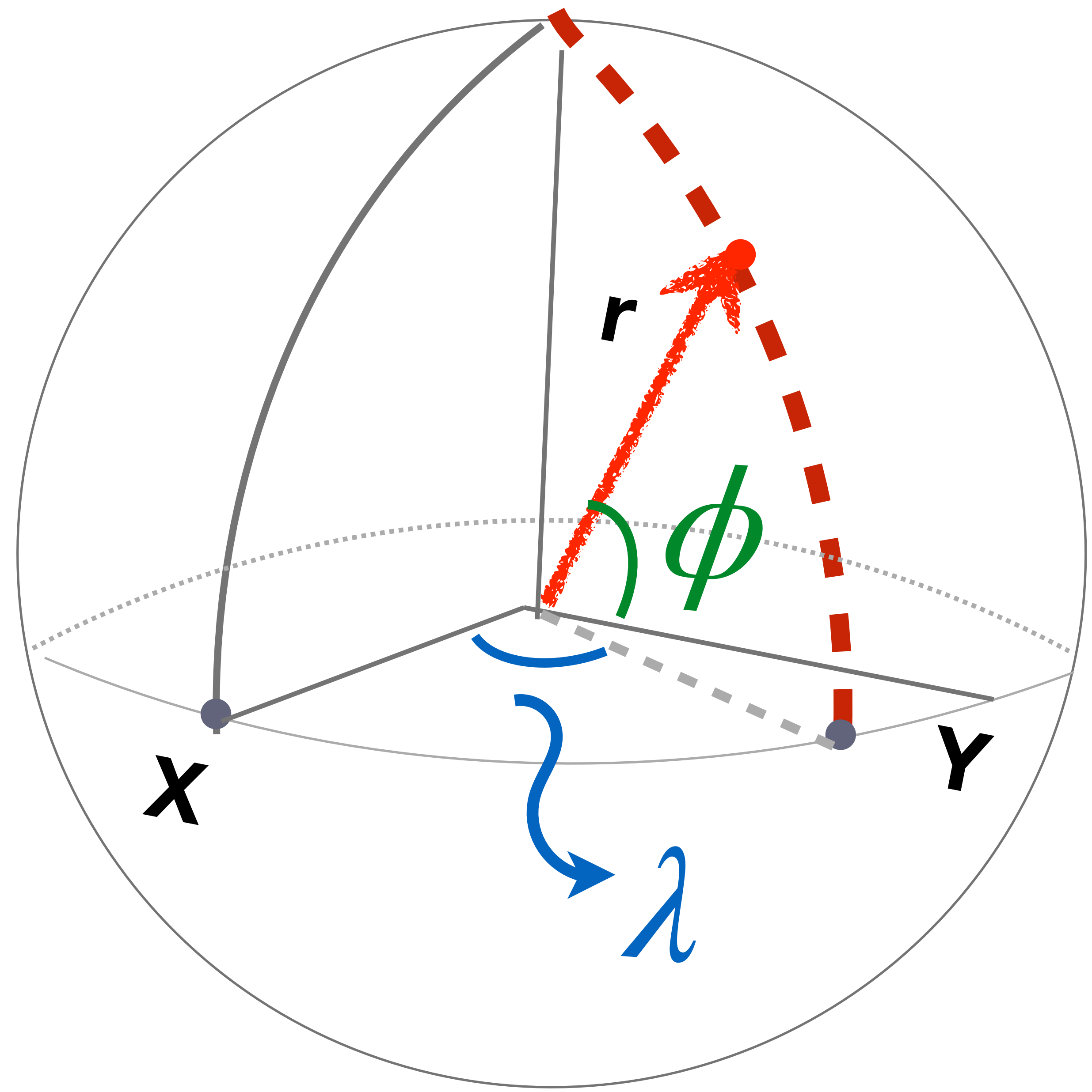
- Coordenadas rectangulares (o cartesianas):

$$Z = r\sin\phi$$

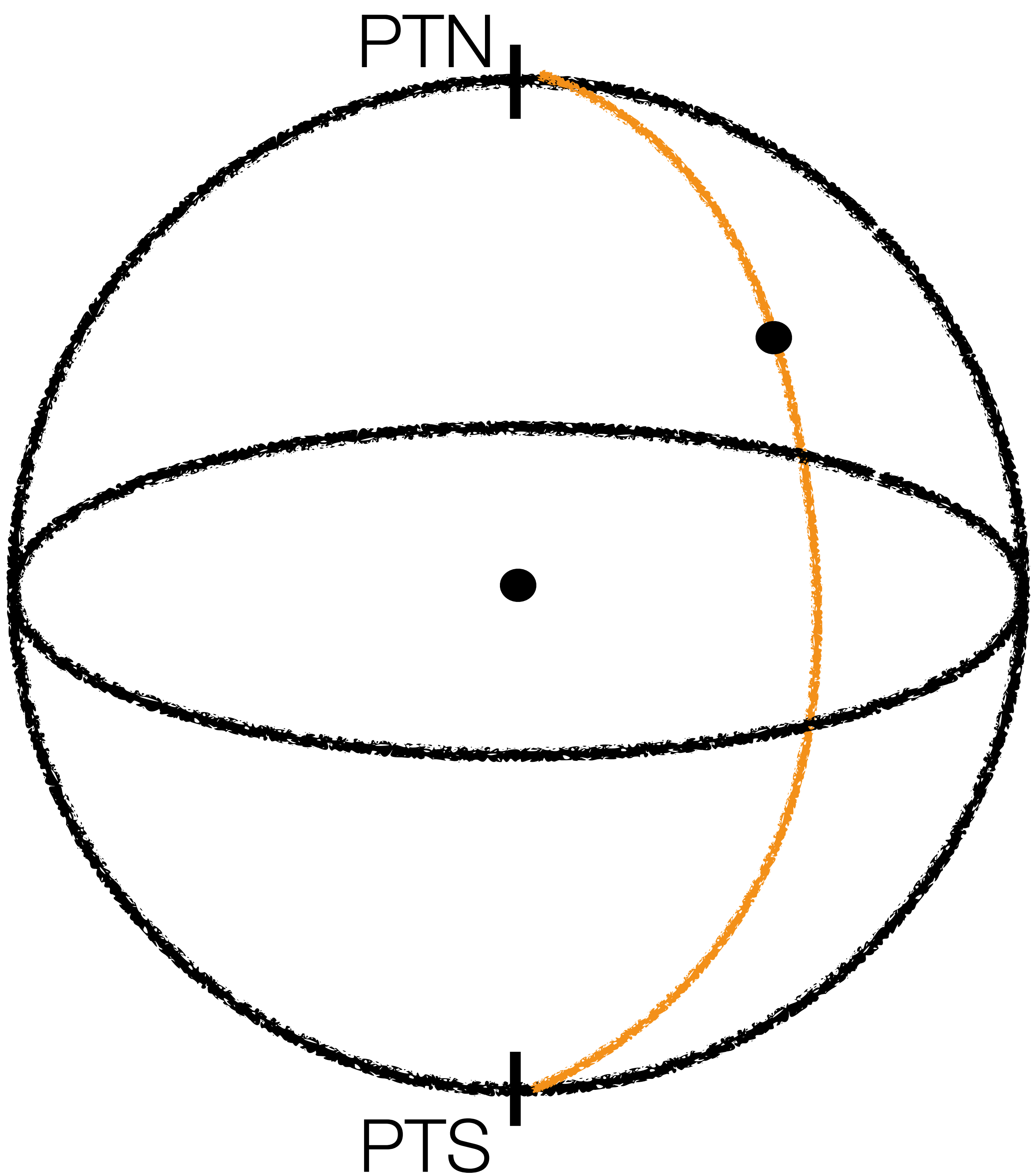
$$X = r\cos\phi\cos\lambda$$

$$Y = r\cos\phi\sin\lambda$$

$$(X, Y, Z)$$



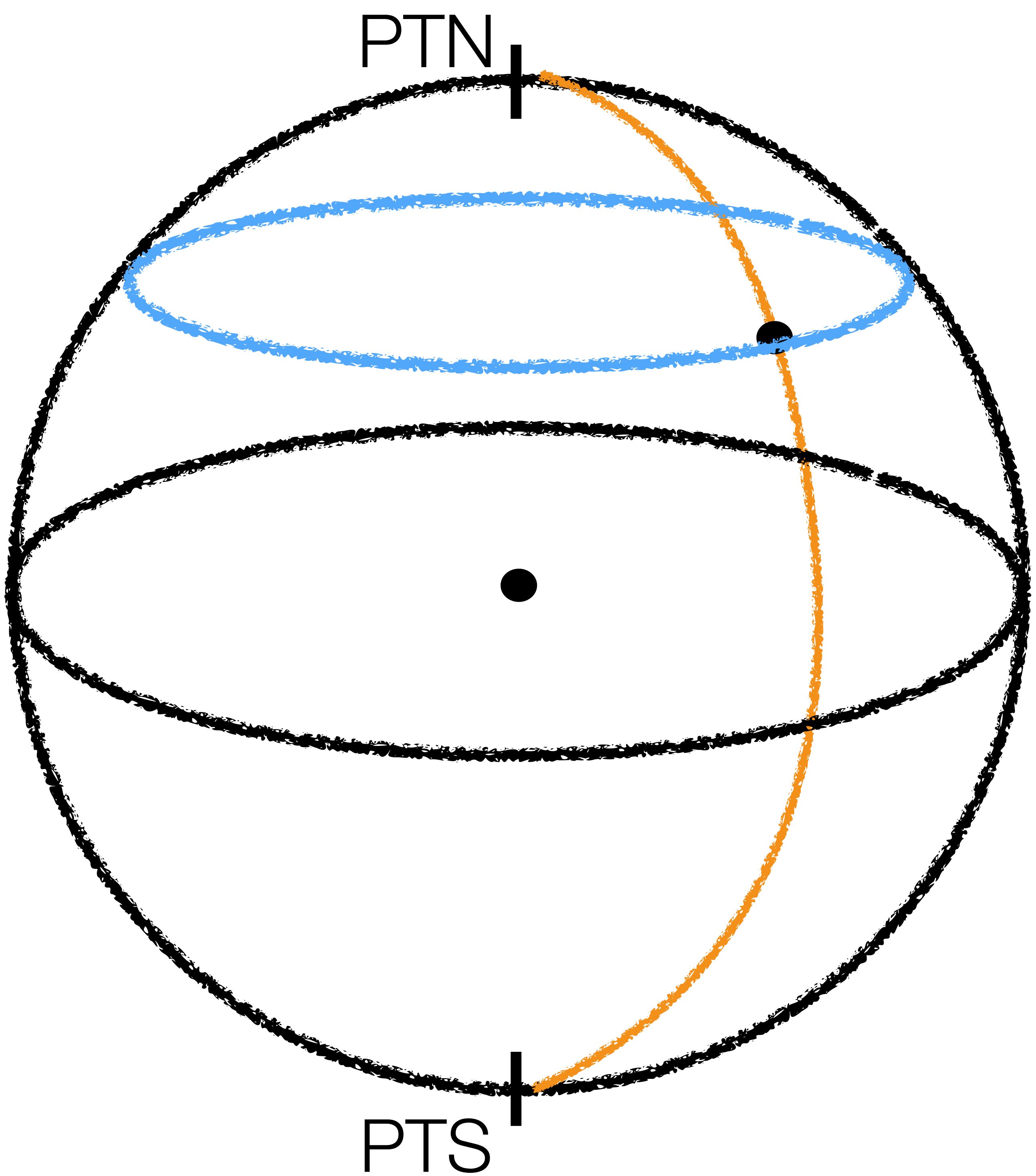
Coordenadas terrestres (geocéntrico)



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por los polos

Ver Cap. 5, Gallaway, “An Introduction to Observational Astrophysics”

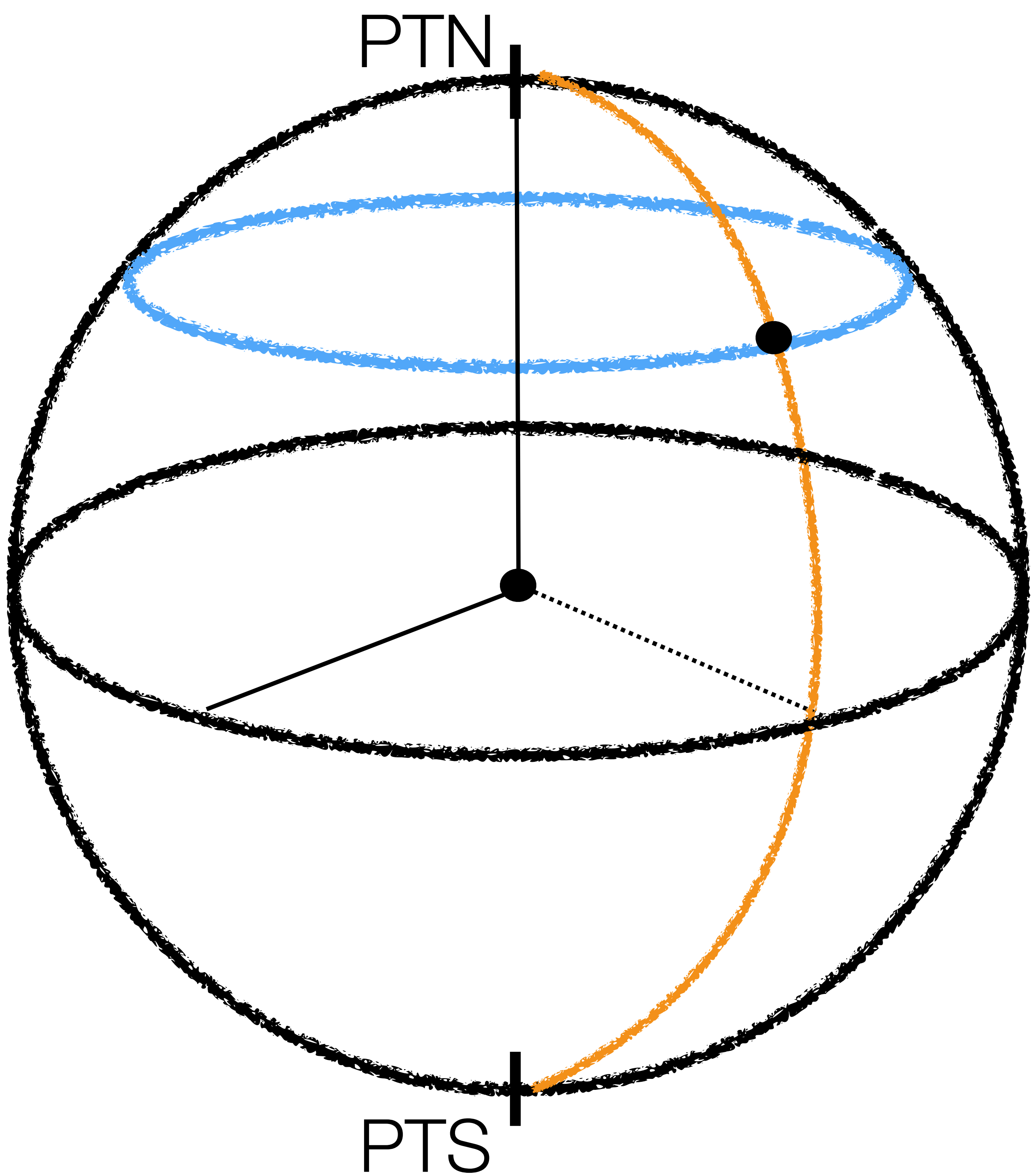
Coordenadas terrestres



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por el PTN y PTS
- **Paralelos**: círculo menor paralelo al ecuador (plano fund.)

Ver Cap. 5, Gallaway, “An Introduction to Observational Astrophysics”

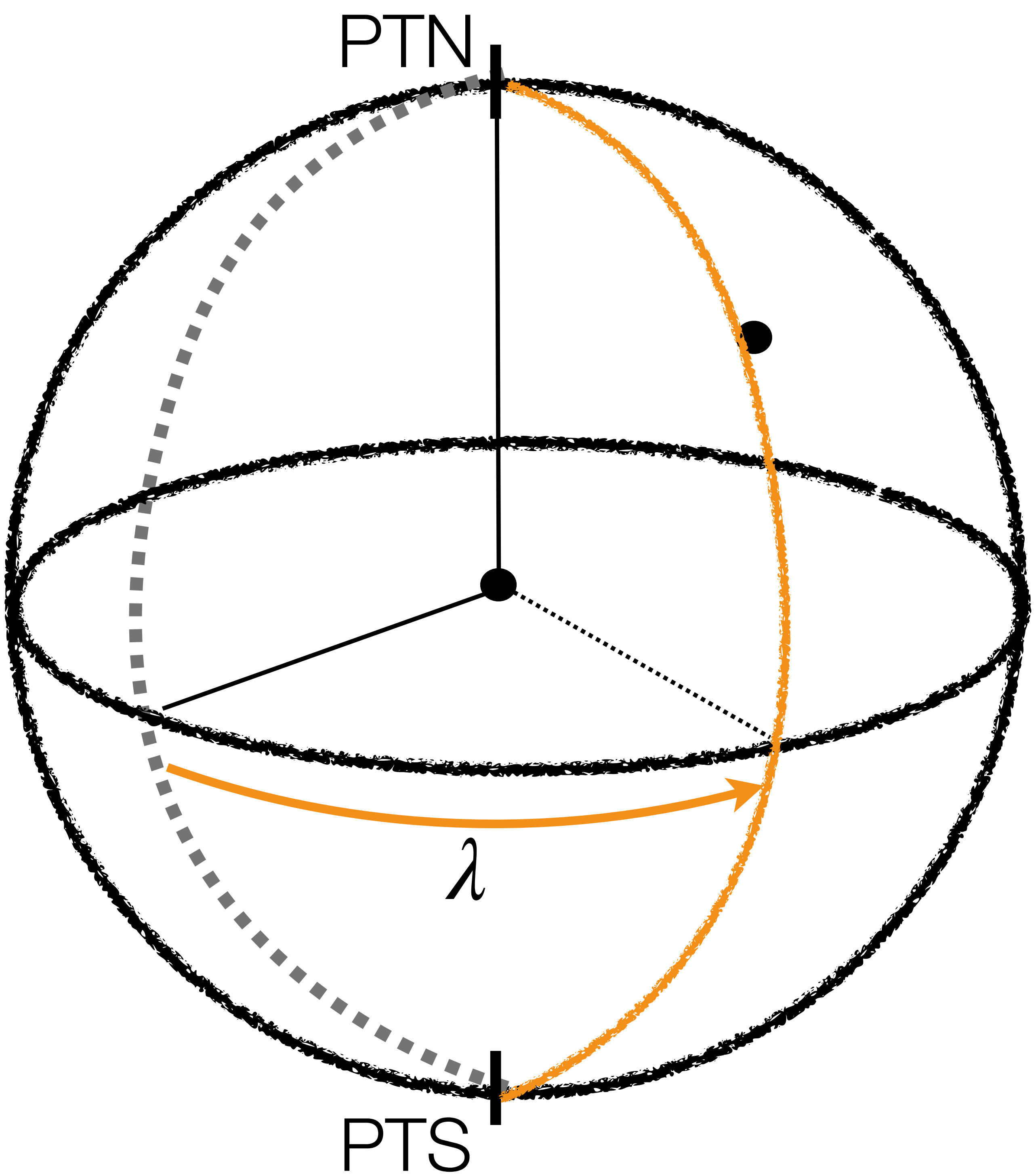
Coordenadas terrestres



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por el PTN y PTS
- **Paralelos**: círculo menor paralelo al ecuador (plano fund.)

Ver Cap. 5, Gallaway, "An Introduction to Observational Astrophysics"

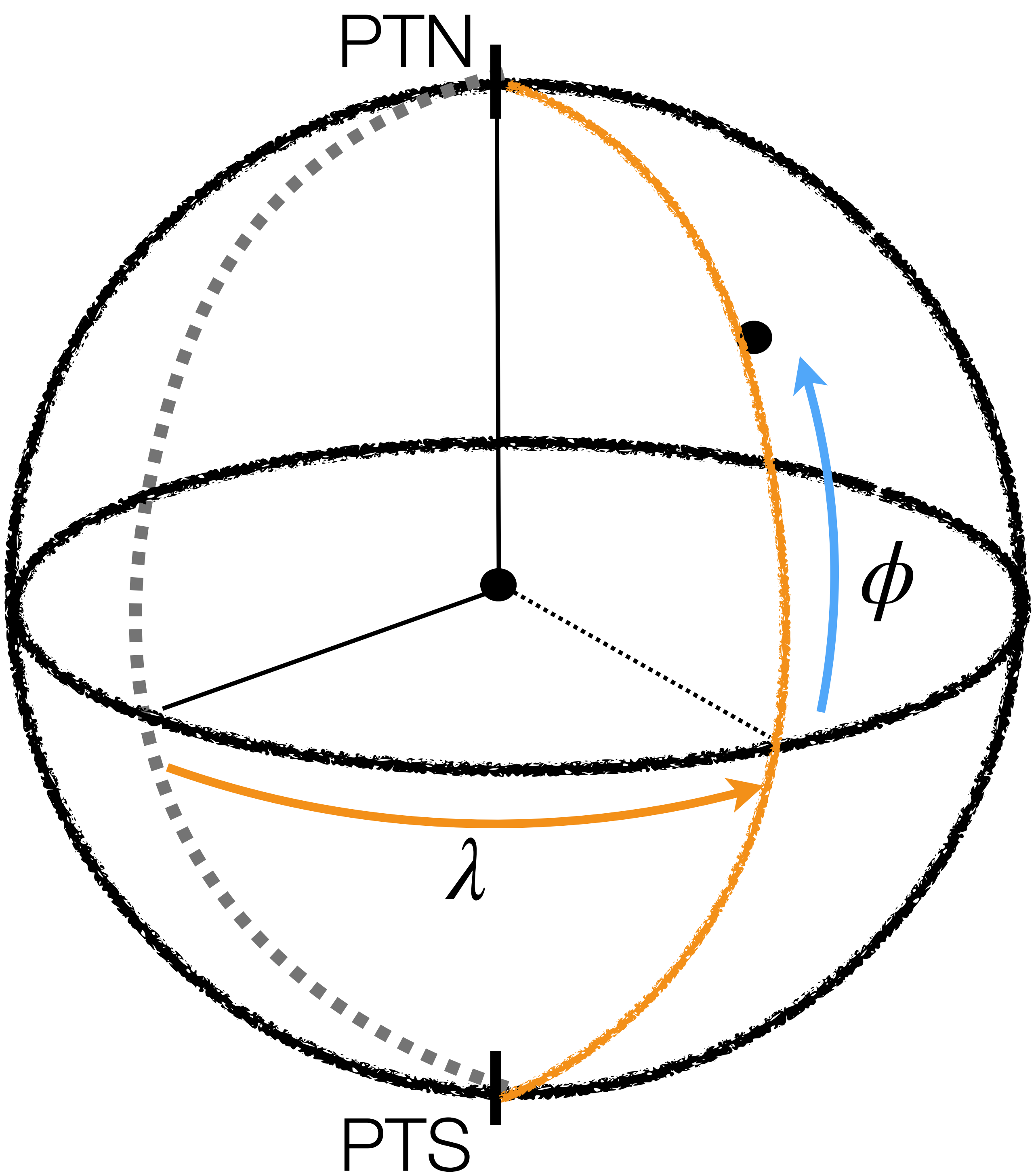
Coordenadas terrestres



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por el PTN y PTS
- **Paralelos**: círculo menor paralelo al ecuador (plano fund)
- **Meridiano de referencia-Longitud λ=0** definido arbitrariamente como el Meridiano de Greenwich

Ver Cap. 5, Gallaway, "An Introduction to Observational Astrophysics"

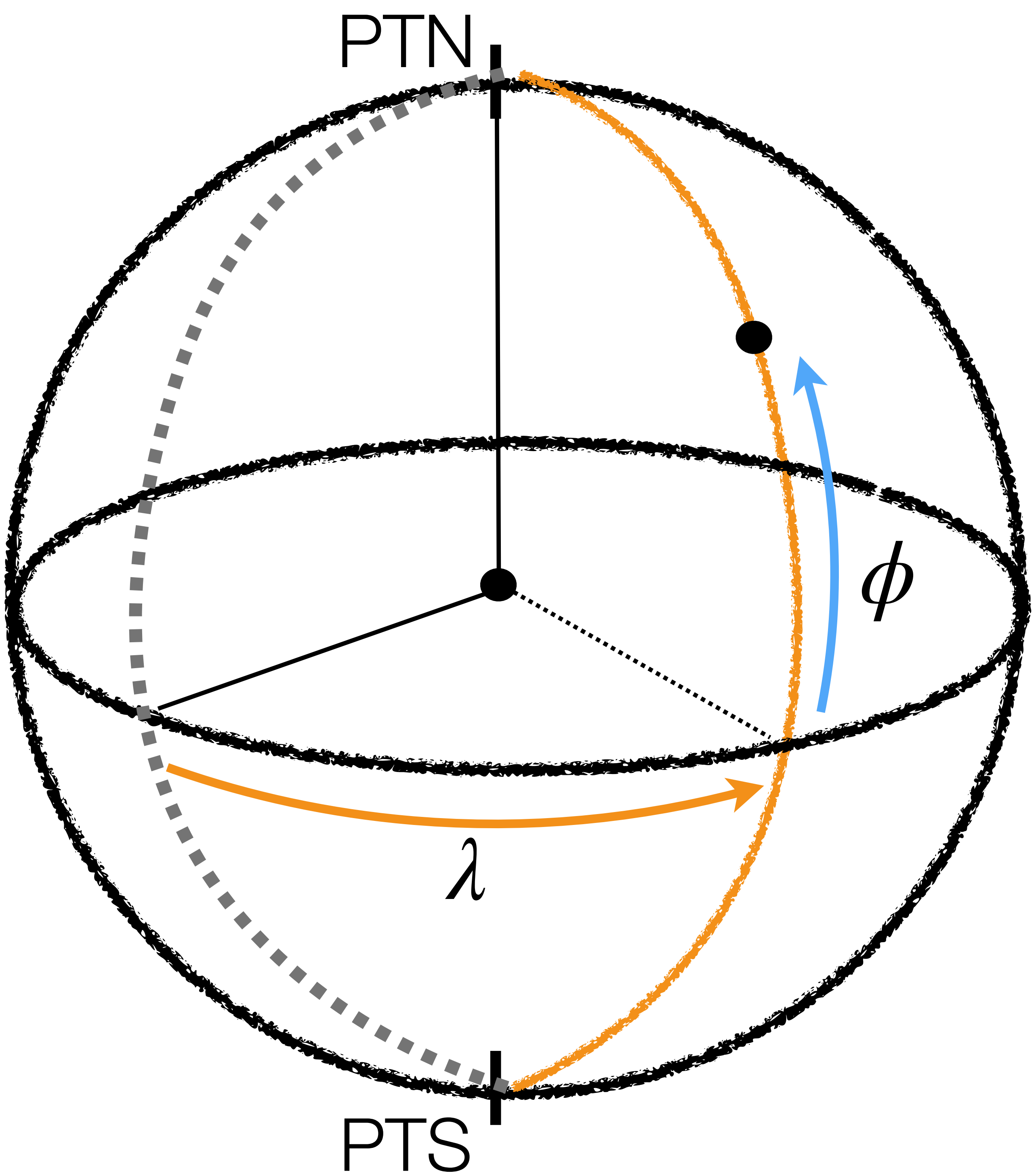
Coordenadas terrestres



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por el PTN y PTS
- **Paralelos**: círculo menor paralelo al ecuador (plano fund)
- **Meridiano de referencia- Longitud λ=0** definido arbitrariamente como el Meridiano de Greenwich

Ver Cap. 5, Gallaway, "An Introduction to Observational Astrophysics"

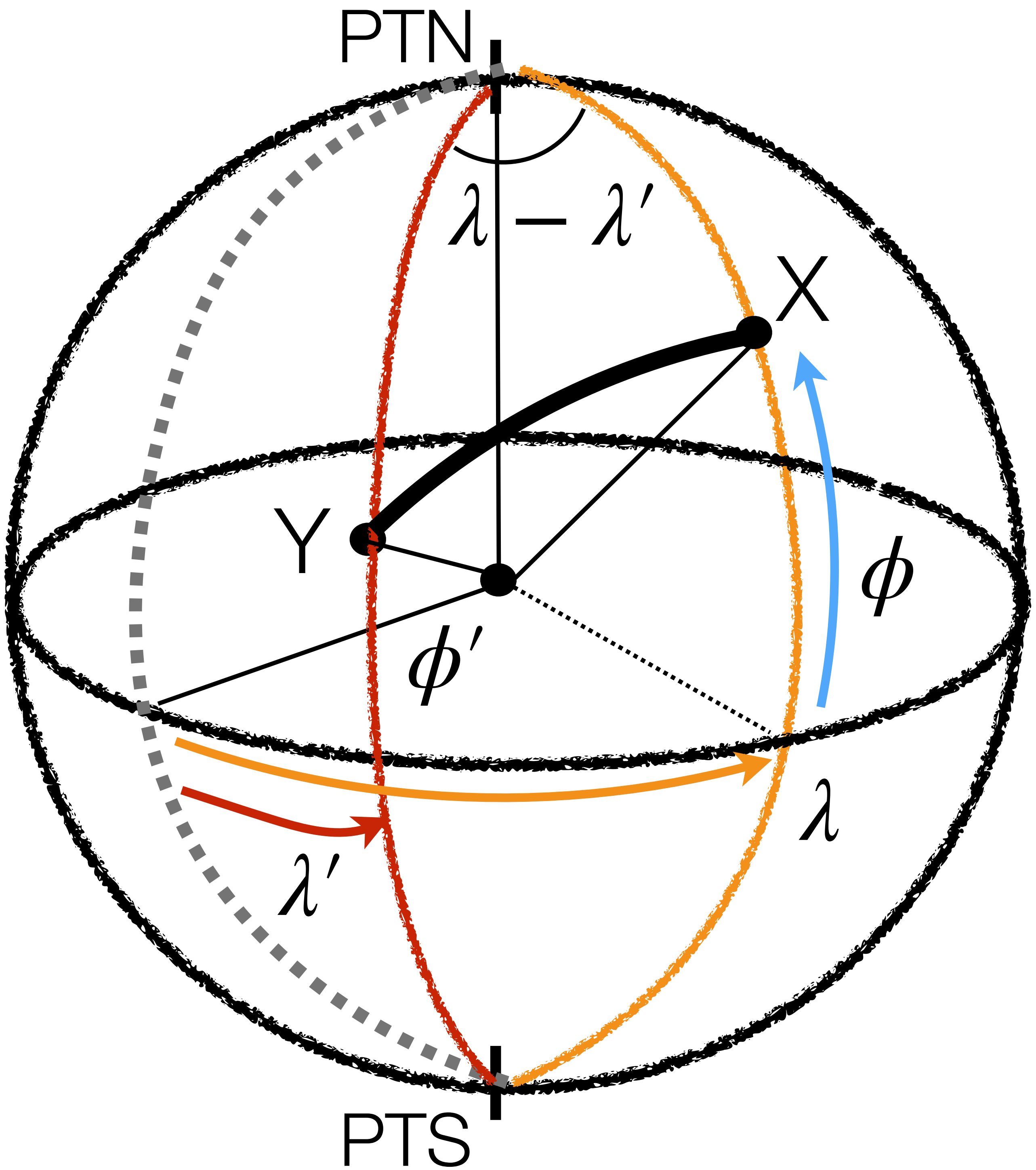
Coordenadas terrestres



- PTN/S = Polo terrestre Norte/Sur
- Plano fundamental: plano del Ecuador Terrestre
- **Meridiano**: Todo círculo máximo que pasa por el PTN y PTS
- **Paralelos**: círculo menor paralelo al ecuador (plano fund)
- **Meridiano de referencia- Longitud λ=0** definido arbitrariamente como el Meridiano de Greenwich
- Longitud **λ** : sentido E(+) / W (-)
- Latitud **ϕ**: Norte (+) / Sur (-)

Ver Cap. 5, Gallaway, "An Introduction to Observational Astrophysics"

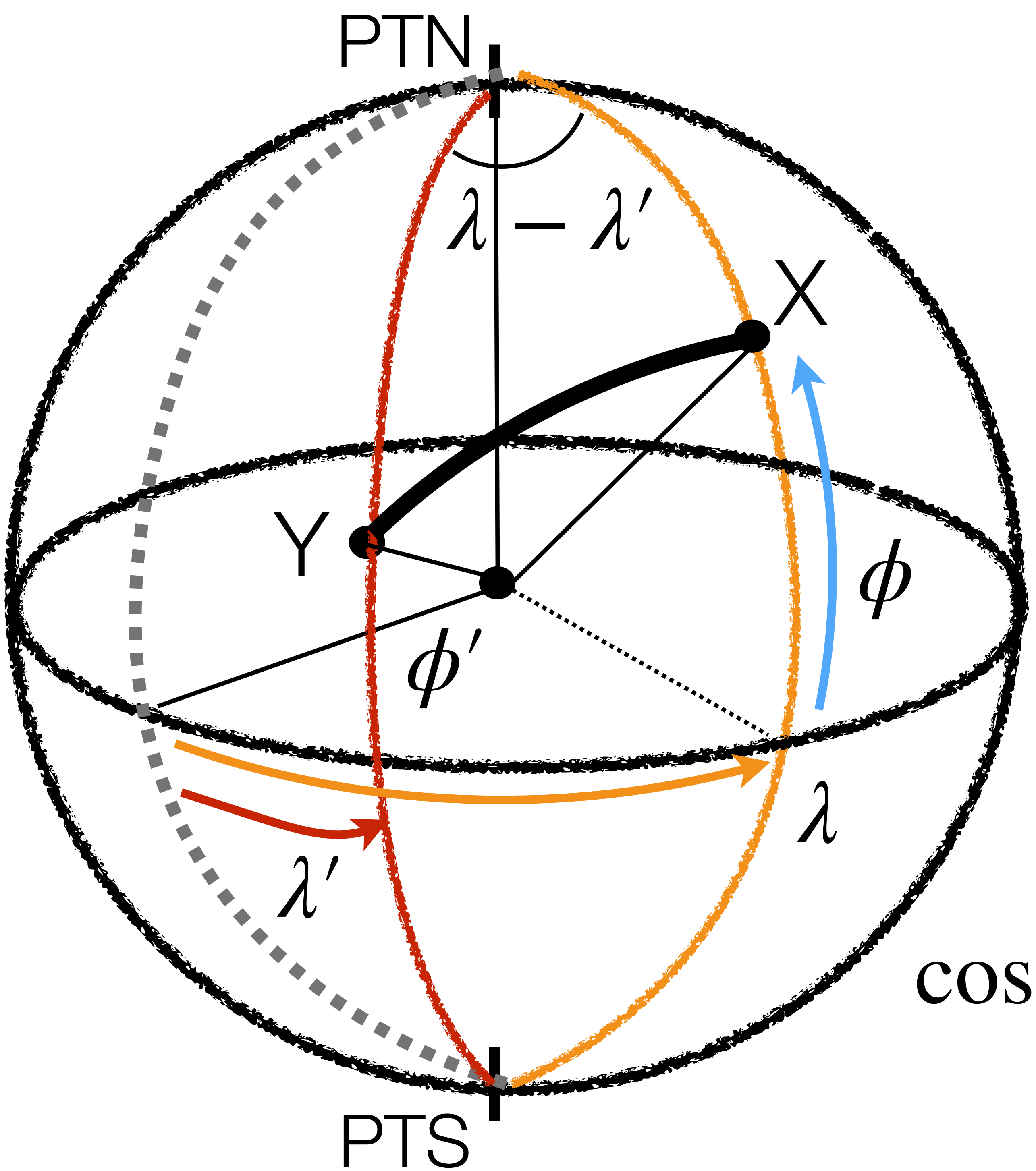
Coordenadas terrestres



- Distancia angular entre X e Y

Ver Cap. 5, Gallaway, “An Introduction to Observational Astrophysics”

Coordenadas terrestres



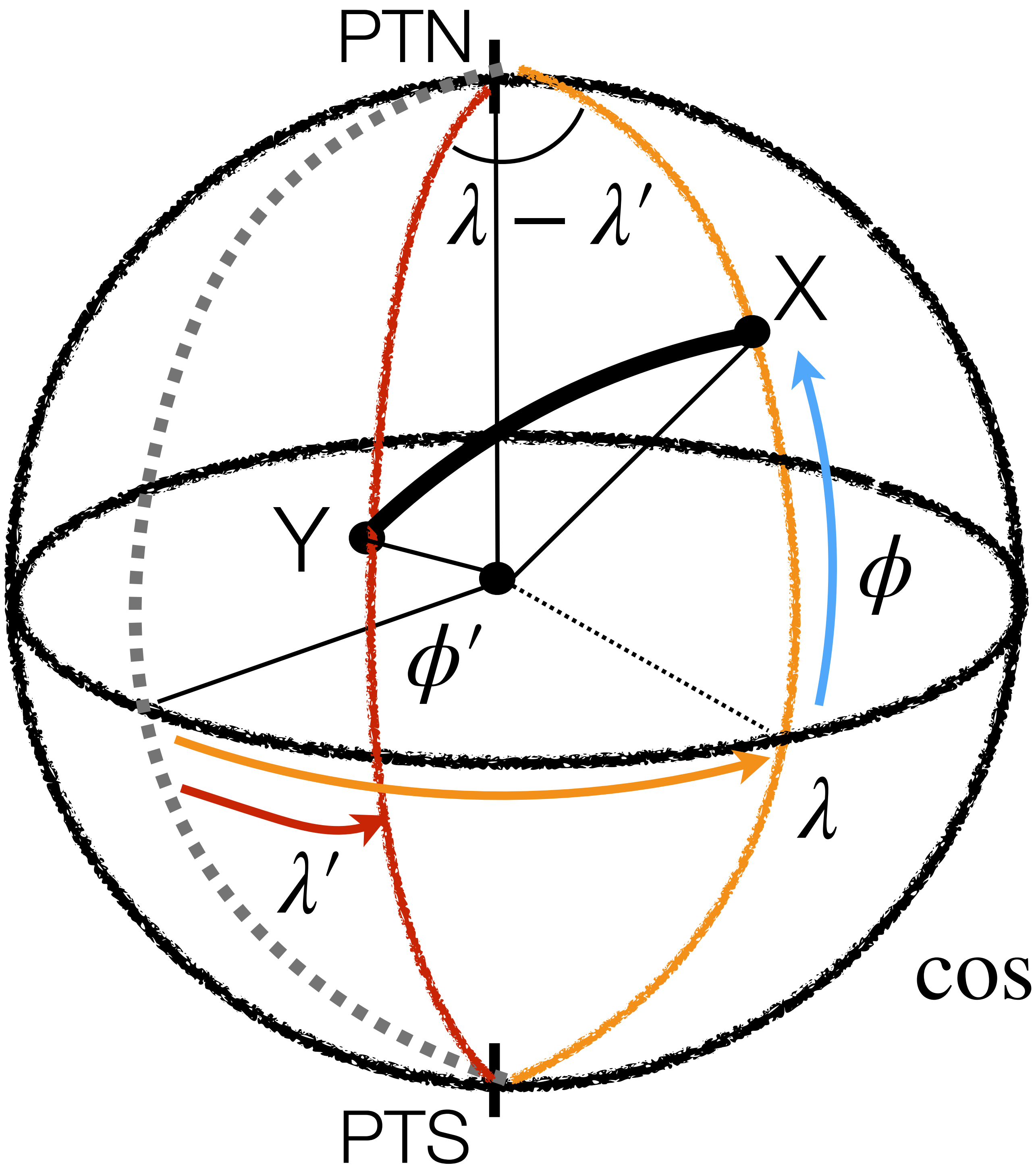
- Distancia angular entre X e Y

cosXY=

$$\cos XY = \cos\phi\cos\phi'\cos(\lambda-\lambda') + \sin\phi\sin\phi'$$

Ver Cap. 5, Gallaway, “An Introduction to Observational Astrophysics”

Coordenadas terrestres



- Distancia angular entre X e Y

$$\cos XY = \cos\phi\cos\phi'\cos(\lambda-\lambda') + \sin\phi\sin\phi'$$

Ver Cap. 5, Gallaway, "An Introduction to Observational Astrophysics"

Llegamos hasta aquí en Teórico 2…

Derivación de la Regla del Seno

Fórmula del Seno

- Demostremos la fórmula del seno:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

- partamos de la identidad trigonométrica:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

- y despejemos cosA de la fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

- Sustituyamos (2) en (1)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}$$

$$1 = \sin^2 A + \frac{\cos^2 a - 2\cos c \cos b \cos a + \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

- queremos despejar $\sin^2 A$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2\cos c \cos b \cos a - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 c \sin^2 b = (1-\cos^2 c)(1-\cos^2 b) = 1+\cos^2 c \cos^2 b - \cos^2 b - \cos^2 c$$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2\cos c\cos b\cos a - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 A = \frac{1 + \cancel{\cos^2 c\cos^2 b} - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos c\cos b\cos a - \cancel{\cos^2 c \cos^2 b}}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos c\cos b\cos a}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos c \cos b \cos a}{\sin^2 a \sin^2 c \sin^2 b}$$

tres días más tarde…

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

tres días más tarde…

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = 1 - [\ldots] \qquad \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = 1 - [\ldots] \qquad \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha **<-TAREA**

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

TS

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

c.q.d.