Astronomía Fundamental

Clase 2-apéndice: Trigonometría Esférica - II

Licenciatura en Astronomía - Fac. de Ciencias, UdelaR
3º Semestre - 2019
Teórico: Cecilia Mateu

Derivación de la Regla del Seno

Fórmula del Seno

- Demostremos la fórmula del seno:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

- partamos de la identidad trigonométrica:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

- y despejemos cosA de la fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

- Sustituyamos (2) en (1)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}$$

$$1 = \sin^2 A + \frac{\cos^2 a - 2\cos c\cos b\cos a + \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

- queremos despejar $\sin^2 A$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2\cos c\cos b\cos a - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 c \sin^2 b = (1-\cos^2 c)(1-\cos^2 b) = 1+\cos^2 c\cos^2 b-\cos^2 b-\cos^2 c$$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2\cos c \cos b \cos a - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 A = \frac{1 + \cancel{\cos^2 c \cos^2 b} - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos c \cos b \cos a - \cancel{\cos^2 c \cos^2 b}}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos c \cos b \cos a}{\sin^2 c \sin^2 b}$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos c \cos b \cos a}{\sin^2 a \sin^2 c \sin^2 b}$$

tres días más tarde…

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

tres días más tarde…

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = 1 - [\ldots] \qquad \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = 1 - [\ldots] \qquad \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha **<-TAREA**

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - [\ldots]$$

- debemos llegar a:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

éste término es invariante ante permutaciones cíclicas (o de cualq. tipo en realidad)

- cuando hagamos cada una de las 2 permutaciones cíclicas posibles para tener el término izq. para B y C tendremos el mismo término a la derecha

TS

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

c.q.d.

Derivación de la fórmula análoga y la de 4 partes

Coordenadas Esféricas (o Coordenadas Polares)

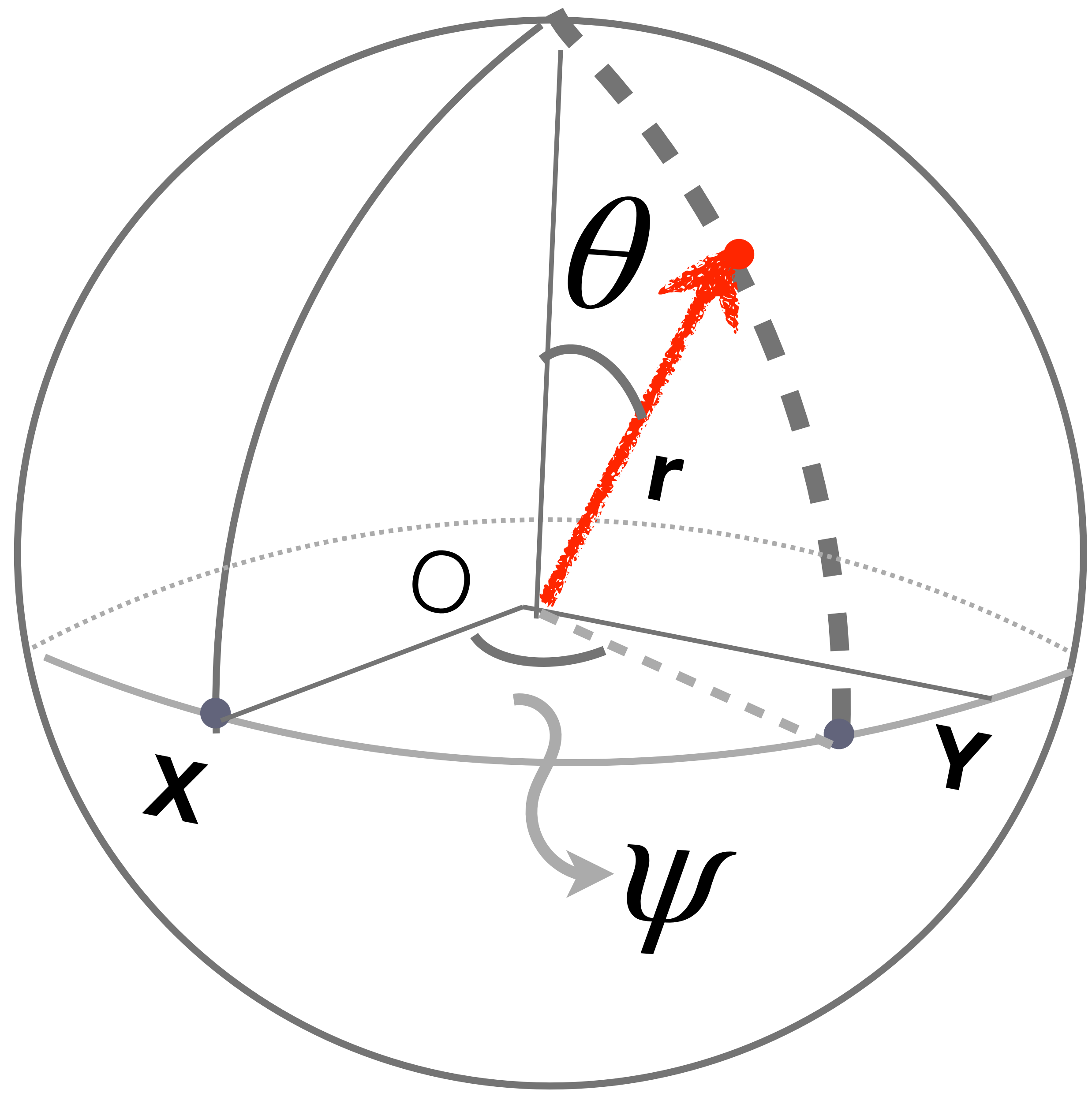
- Coordenadas rectangulares (o cartesianas):

$$X = r\sin\theta\cos\psi$$

$$Y = r\sin\theta\sin\psi$$

$$Z = r\cos\theta$$

$$(X, Y, Z)$$

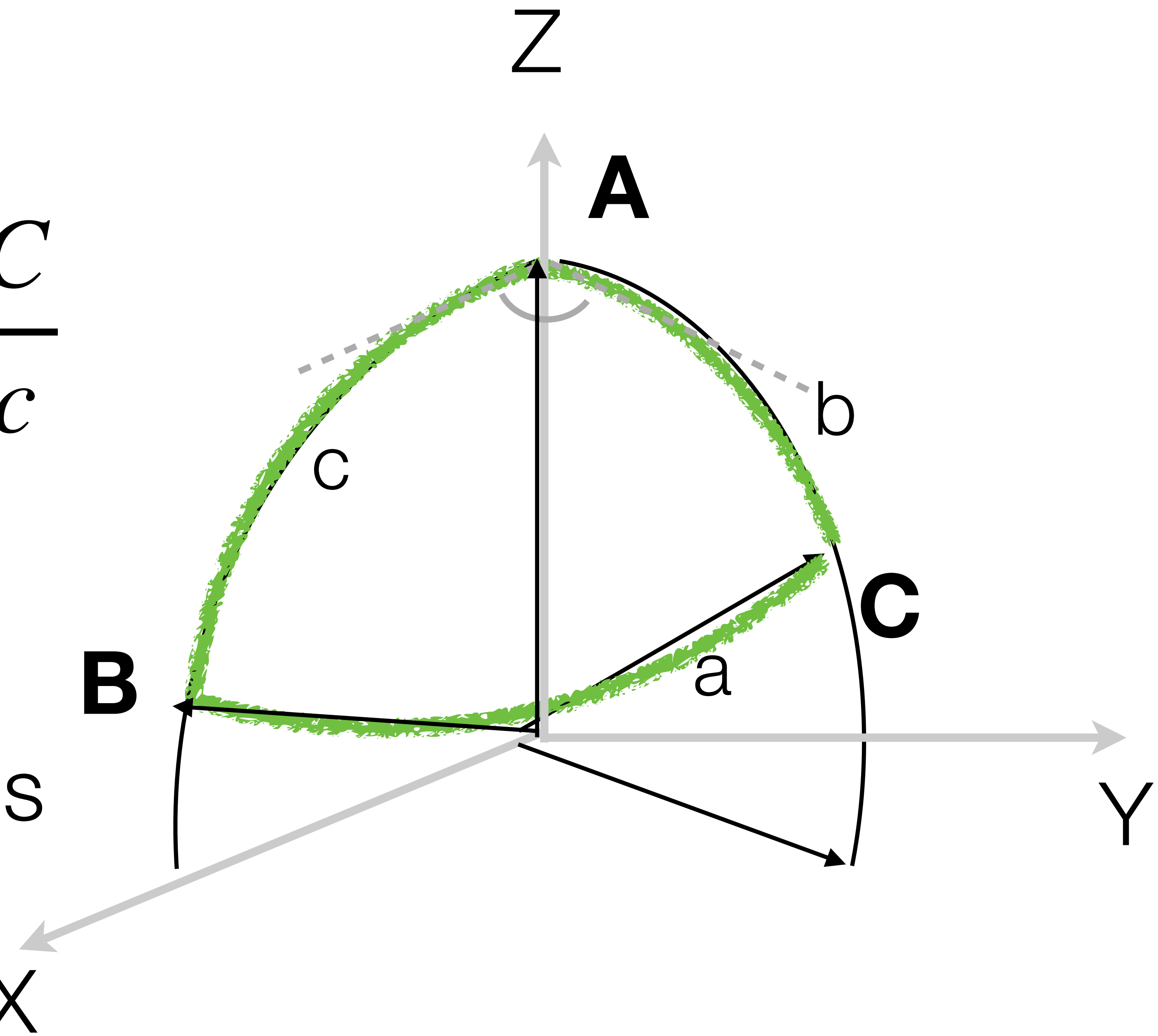


Fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

Fórmula del seno

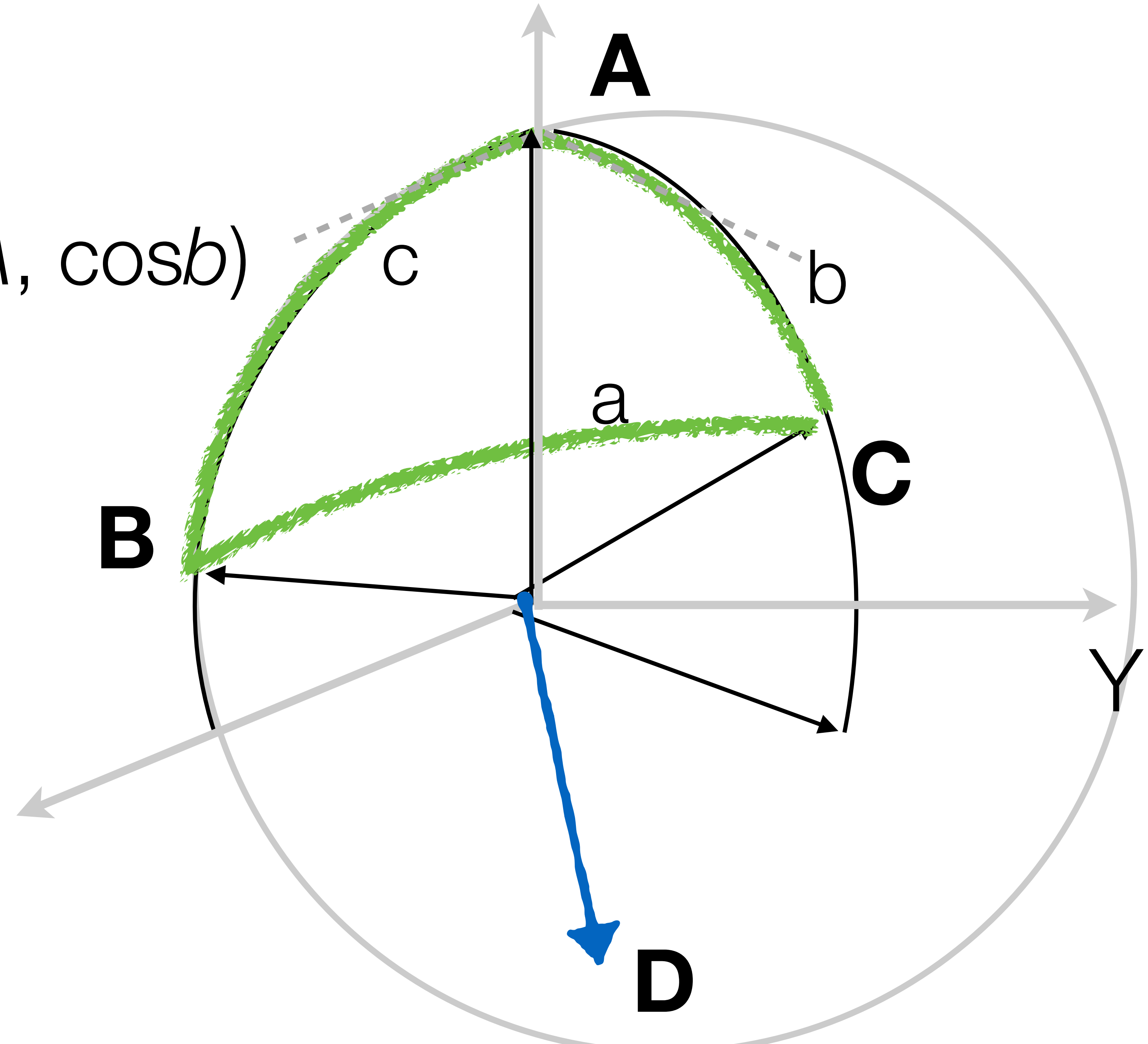
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$



queremos encontrar dos fórmulas más

$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$

$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$



- si D es el polo del círculo máximo BC:

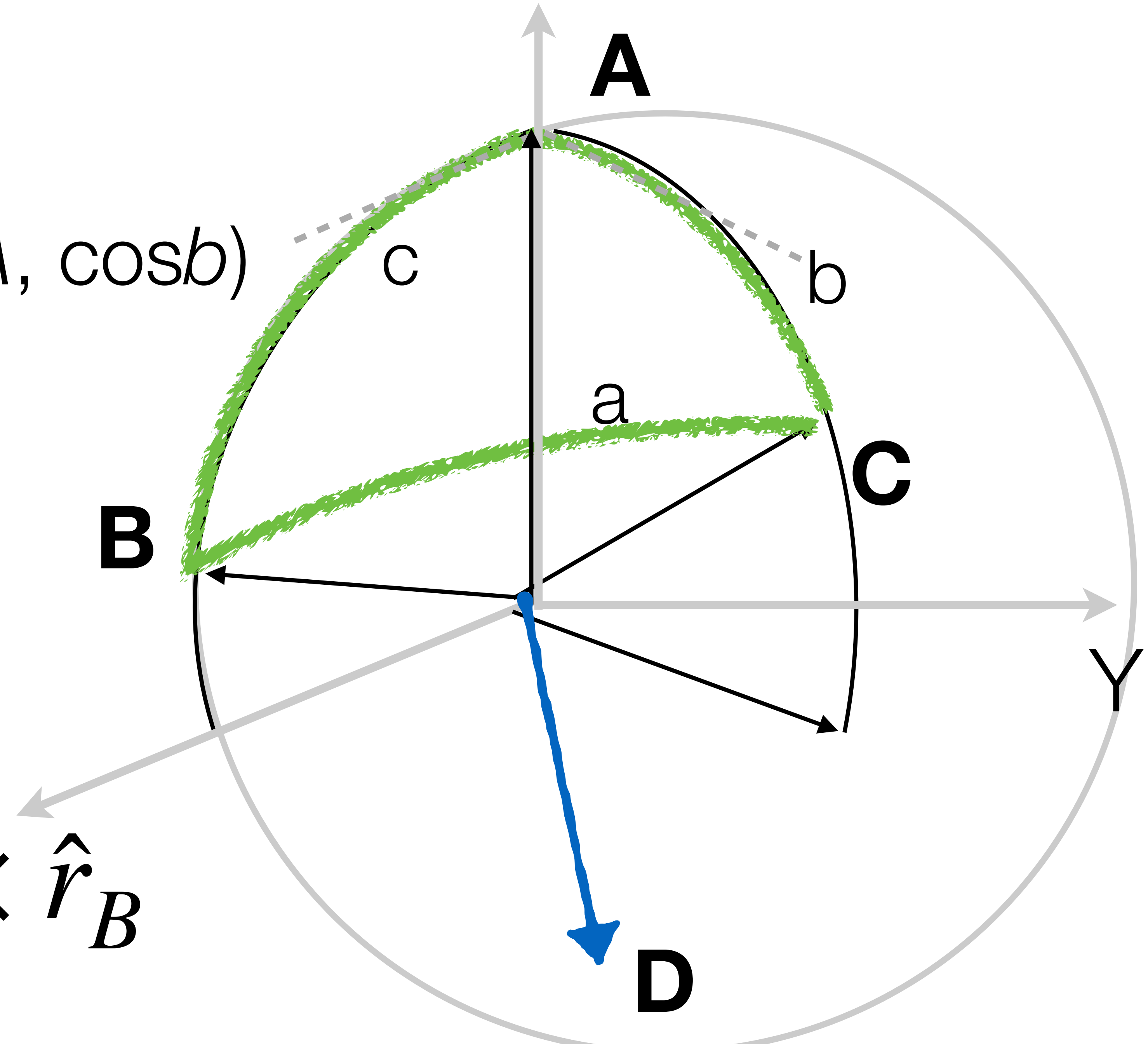
$$\hat{r}_D \propto \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

¿conocemos BC?

$$(sin?)\hat{r}_D = \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

$$\hat{r}_B = (\sin c,\ 0,\ \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\ \sin b \sin A,\ \cos b)$$



- si D es el polo del círculo máximo BC:

$$\hat{r}_D \propto \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

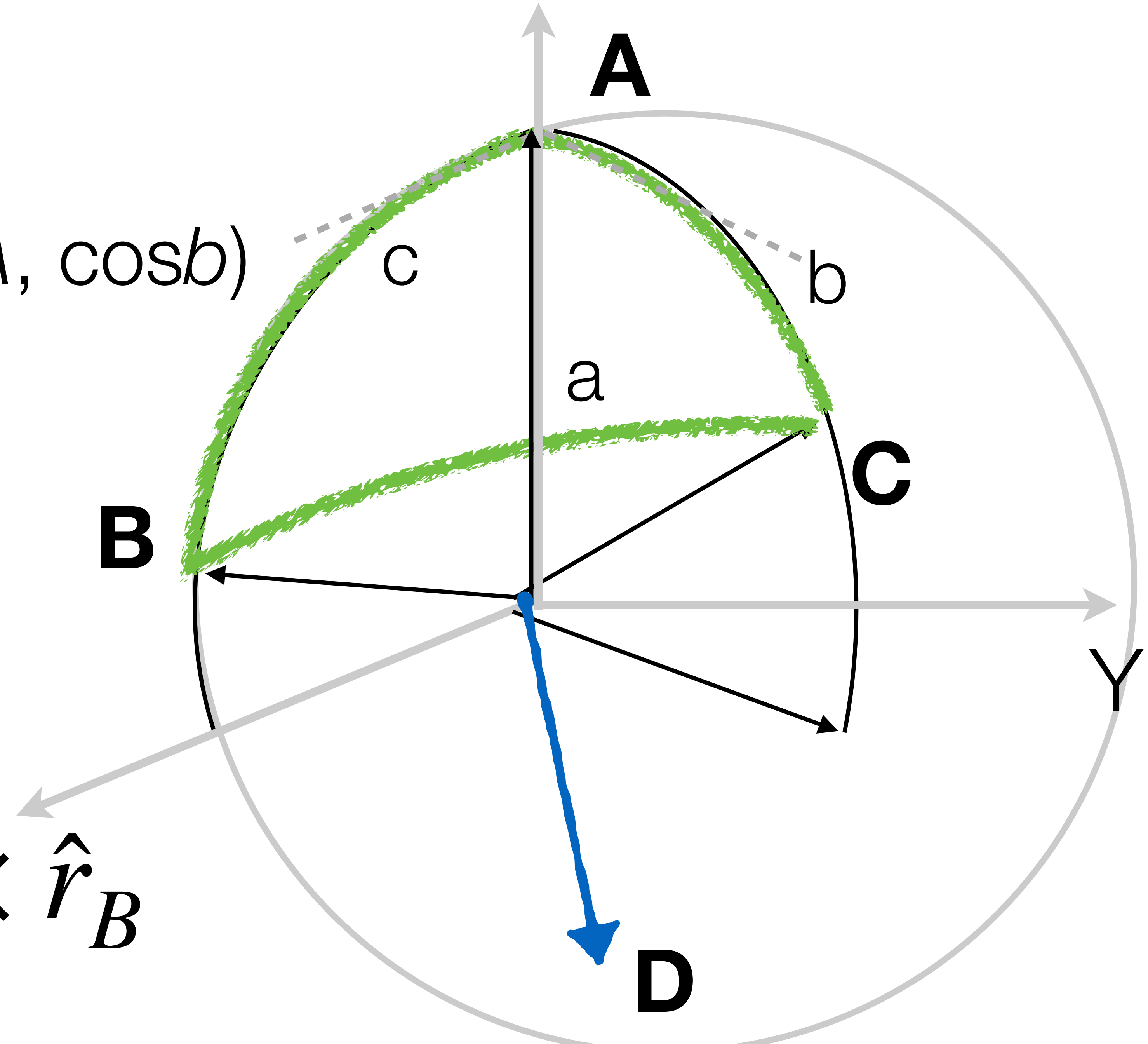
$$(\sin BC)\hat{r}_D = \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

¿conocemos BC?

$$(\sin ?)\hat{r}_D = \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

$$\hat{r}_B = (\sin c,\ 0,\ \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\ \sin b \sin A,\ \cos b)$$



- si D es el polo del círculo máximo BC:

$$\hat{r}_D \propto \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

$$(sinBC)\hat{r}_D = \hat{r}_C \times \hat{r}_B$$

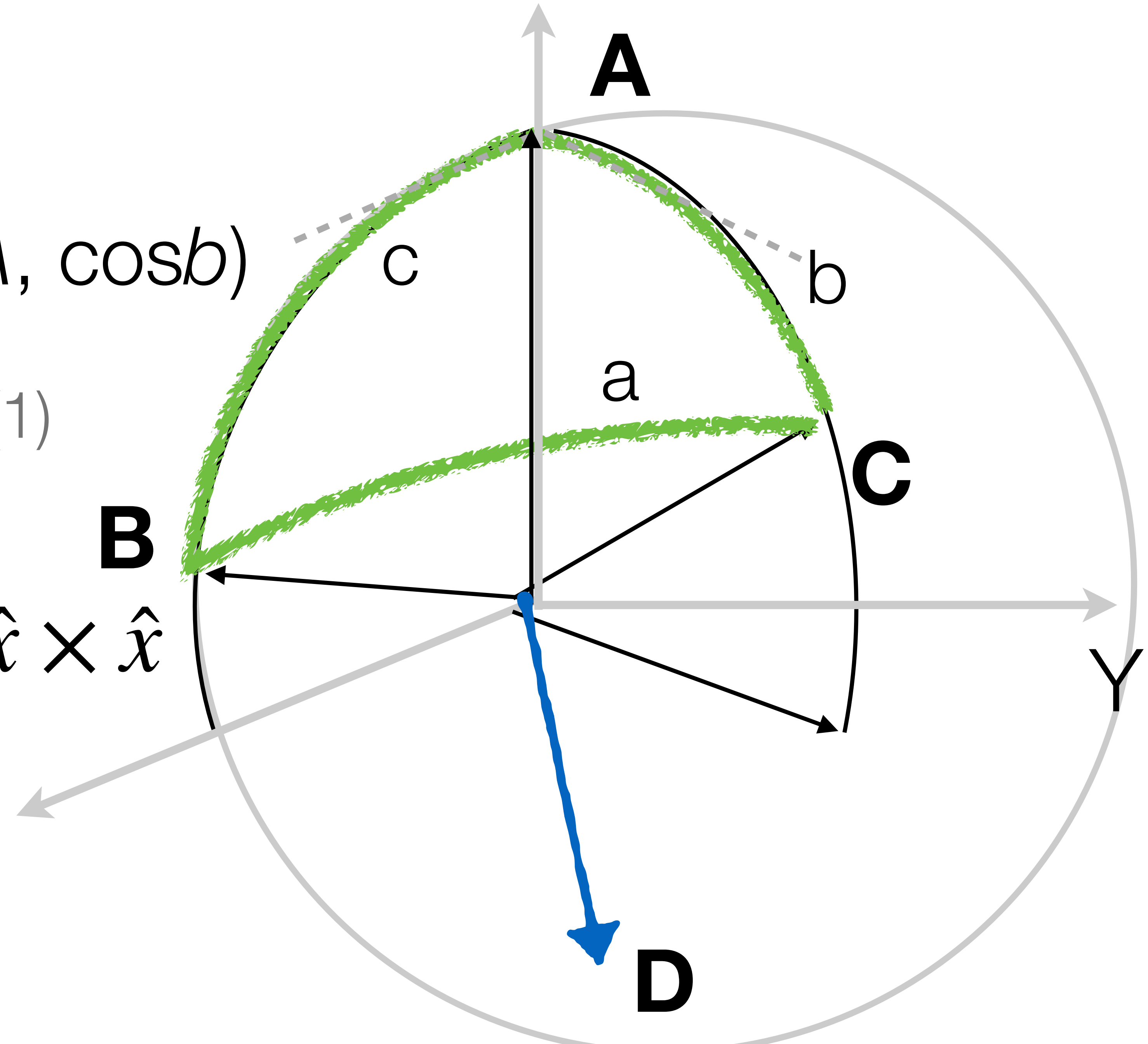
¿conocemos BC?

$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_C \times \hat{r}_B \quad \textbf{(1)}$$

$$\begin{array}{cccc} & \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{r}_B = (& \sin c, & 0, & \cos c) \end{array}$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\ \sin b \sin A,\ \cos b)$$

- tomemos el lado derecho de (1) primero, desarrollemos el p.v.:

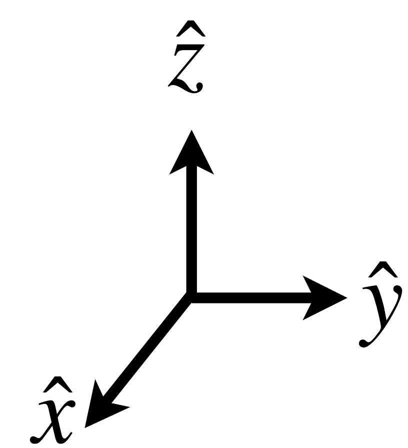


$$\hat{r}_B \times \hat{r}_C = \ \sin c \sin b \cos A\ \hat{x} \times \hat{x}$$

$$+\sin c \sin b \sin A \quad \hat{x} \times \hat{y}$$

$$+\sin c \cos b \quad \hat{x} \times \hat{z}$$

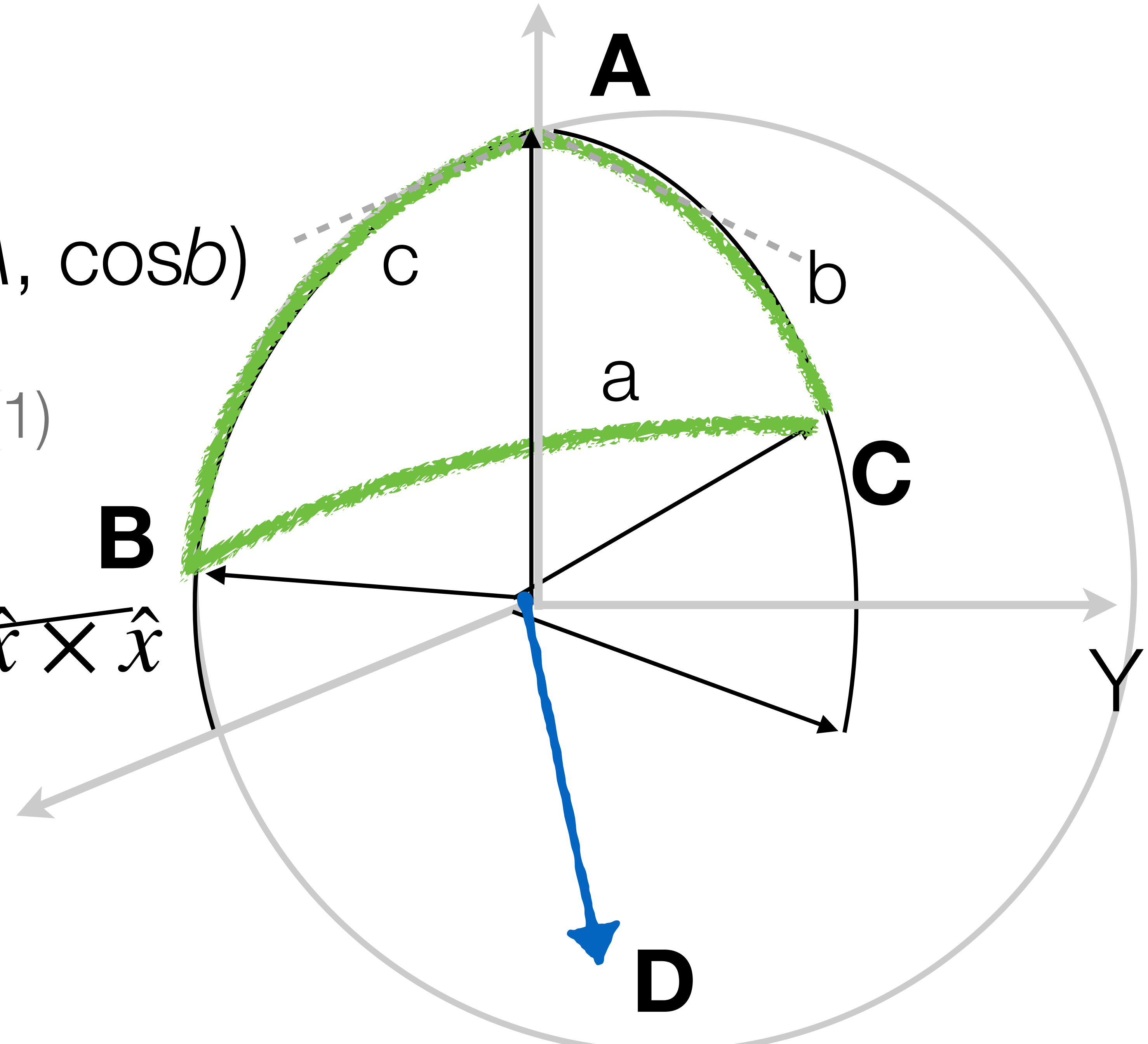
$$+\cos c \sin b \cos A\ \hat{y}\ -\cos c \sin b \sin A\ \hat{x}$$



$$\hat{r}_B = (\overset{\hat{x}}{\sin c},\ \overset{\hat{y}}{0},\ \overset{\hat{z}}{\cos c})$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\ \sin b \sin A,\ \cos b)$$

- tomemos el lado derecho de (1)
  primero, desarrollemos el p.v.:



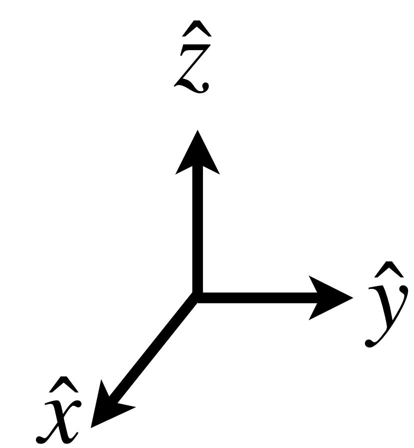
$$\hat{r}_B \times \hat{r}_C = \cancel{\sin c \sin b \cos A\ \hat{x} \times \hat{x}}$$

$$+\sin c \sin b \sin A \quad \cancel{\hat{x} \times \hat{y}}^{\hat{z}}$$

$$+\sin c \cos b \quad \cancel{\hat{x} \times \hat{z}} \quad -\hat{y}$$

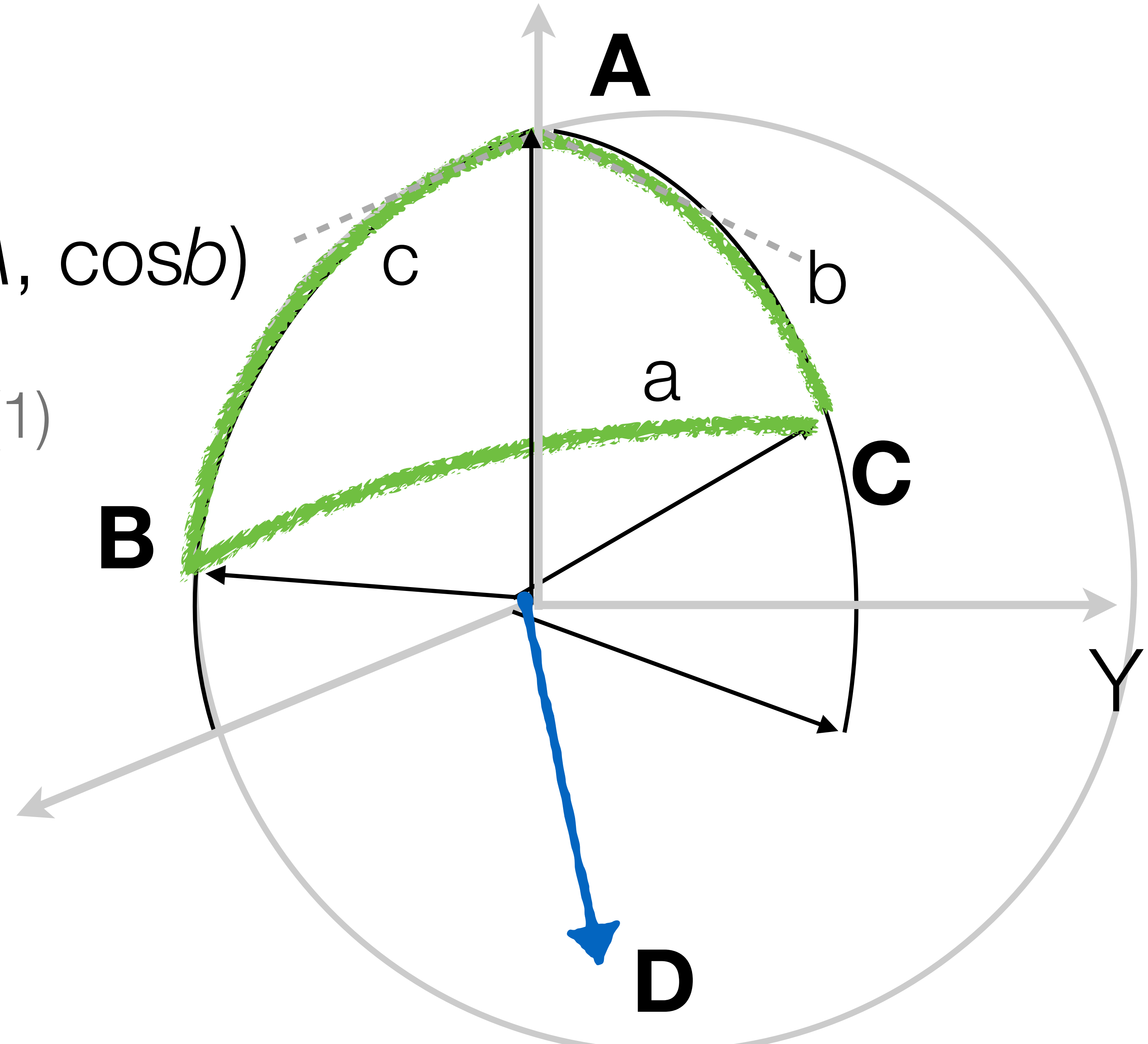
$$+\cos c \sin b \cos A\ \hat{y} - \cos c \sin b \sin A\ \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \hat{r}_C \times \hat{r}_B = {} & \cos c \sin b \sin A \hat{x} \\ & + (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\hat{y} \\ & - \sin c \sin b \sin A \hat{z} \end{aligned}$$



$$\hat{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$$

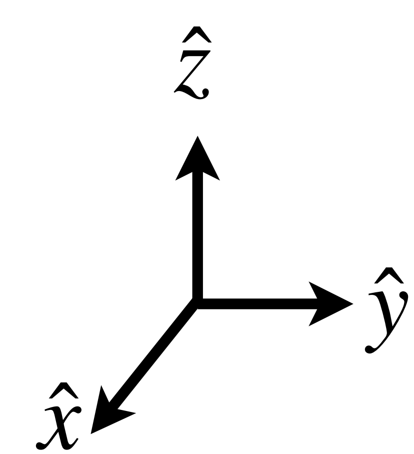
$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$



- tomemos el lado derecho de (1) primero, desarrollemos el p.v.:

$$\hat{r}_C \times \hat{r}_B =$$

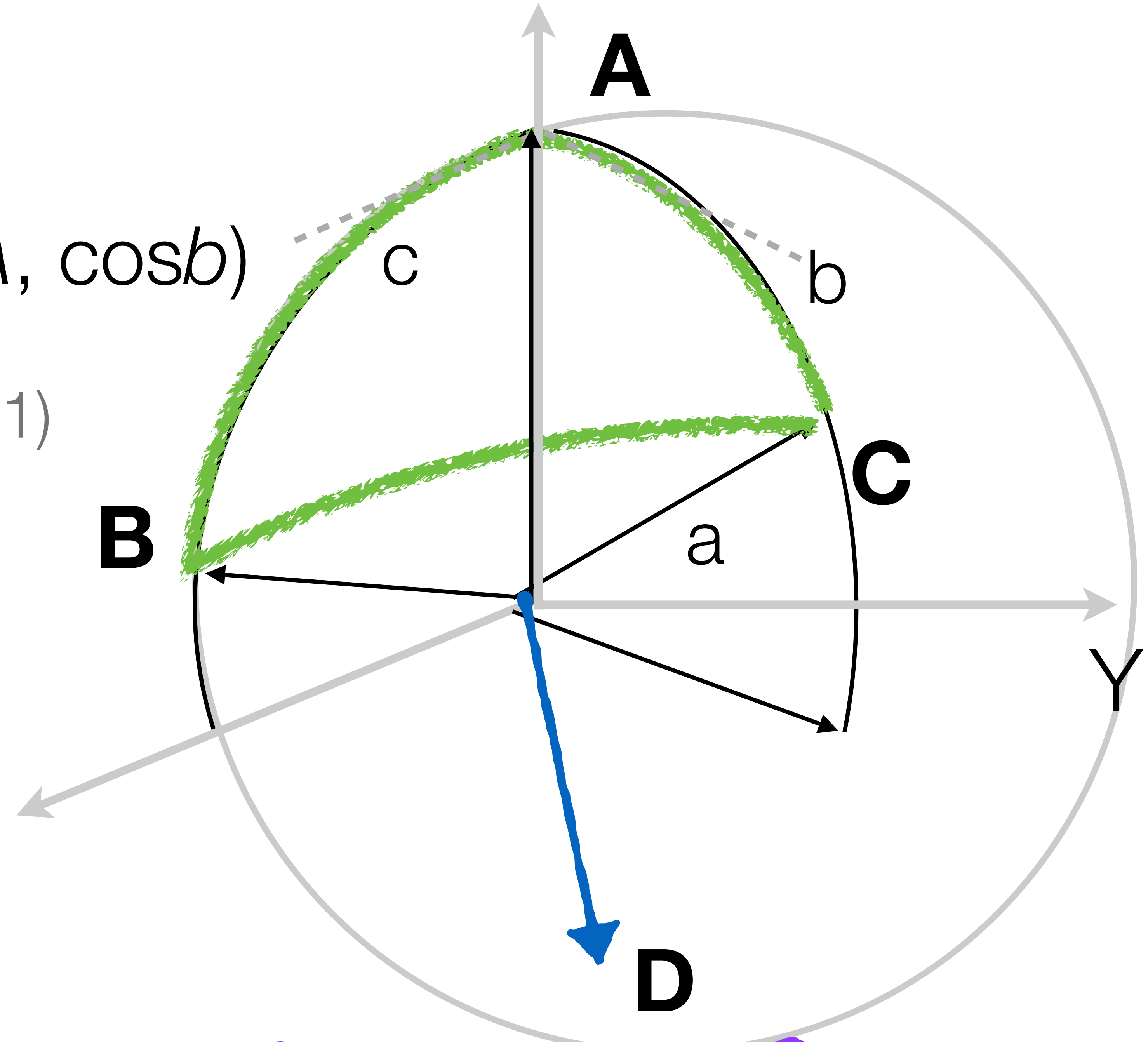
$$\hat{r}_C \times \hat{r}_B = \cos c \sin b \sin A \hat{x} + (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\hat{y} - \sin c \sin b \sin A \hat{z}$$



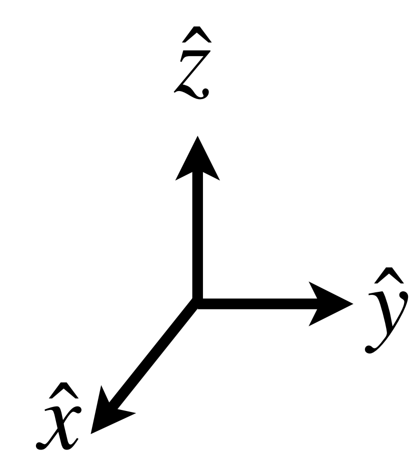
$$\hat{r}_B = (\sin c,\, 0,\, \cos c)$$

$$\hat{r}_C = (\sin b \cos A,\, \sin b \sin A,\, \cos b)$$

- tomemos el lado derecho de (1) primero, desarrollemos el p.v.:



$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r}_C \times \hat{r}_B = {} & \cos c \sin b \sin A \hat{x} \\ & +(\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\hat{y} \qquad \textbf{(2)} \\ & -\sin c \sin b \sin A \hat{z} \end{aligned}}$$

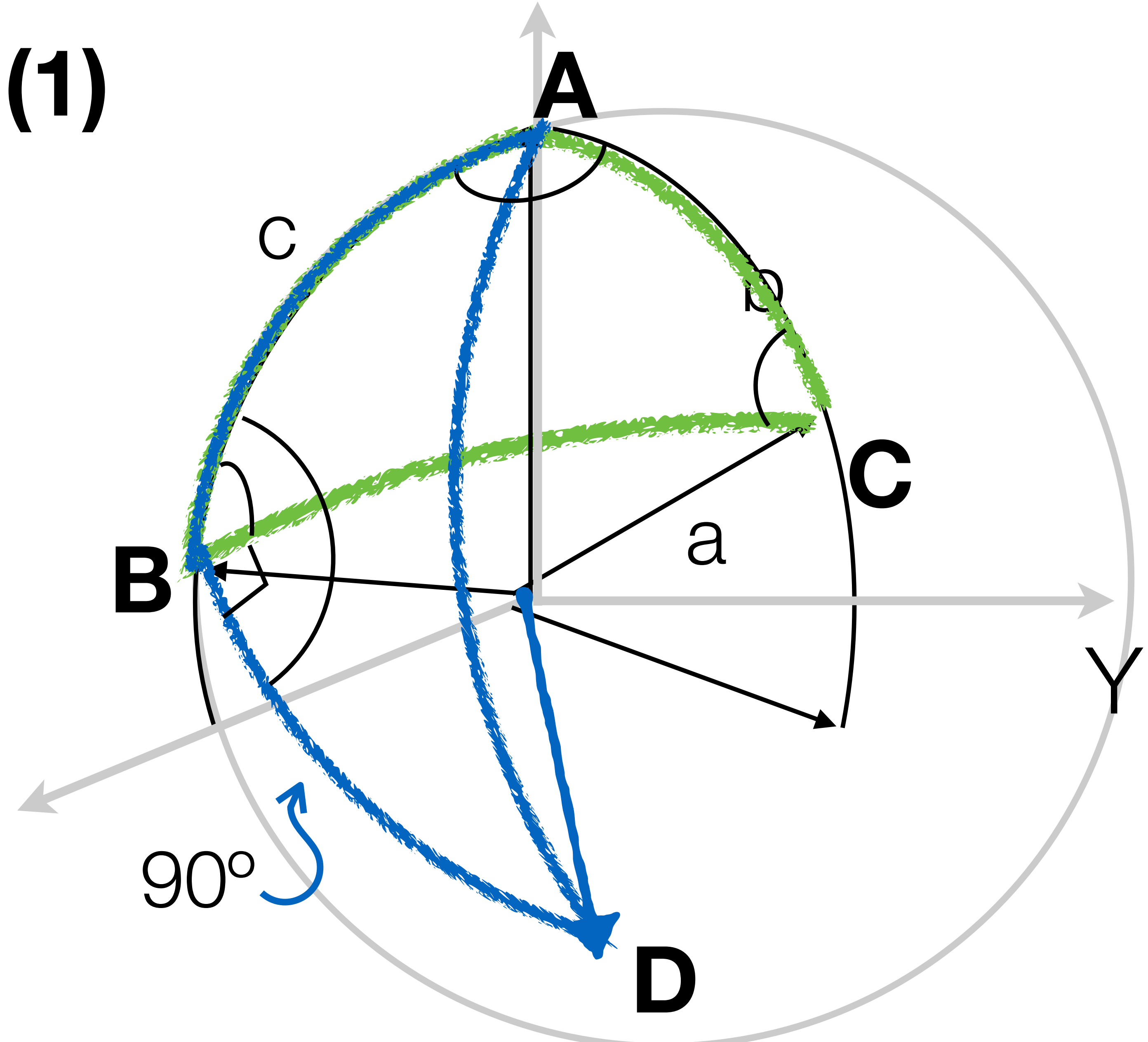


$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\theta = AD \quad \psi = BAD$$

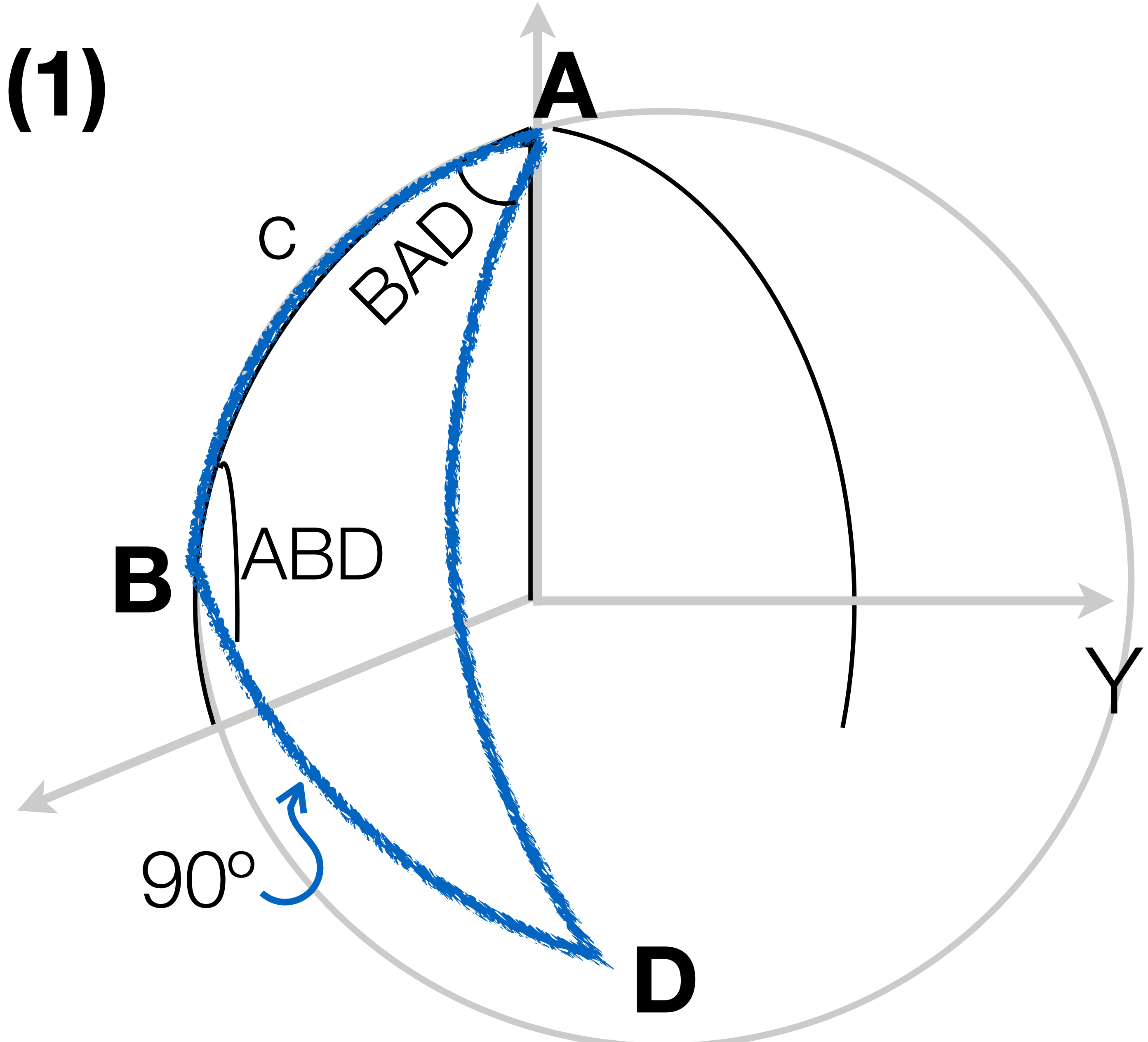
$$ABD = B + 90°$$



$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \quad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\theta = \text{AD} \qquad \psi = \text{BAD}$$



$$X = \sin\theta\cos\psi$$

$$Y = \sin\theta\sin\psi$$

$$Z = \cos\theta$$

$$\hat{r}_D = (\sin AD \cos BAD,\ \sin AD \sin BAD,\ \cos AD) \quad \textbf{(3)}$$

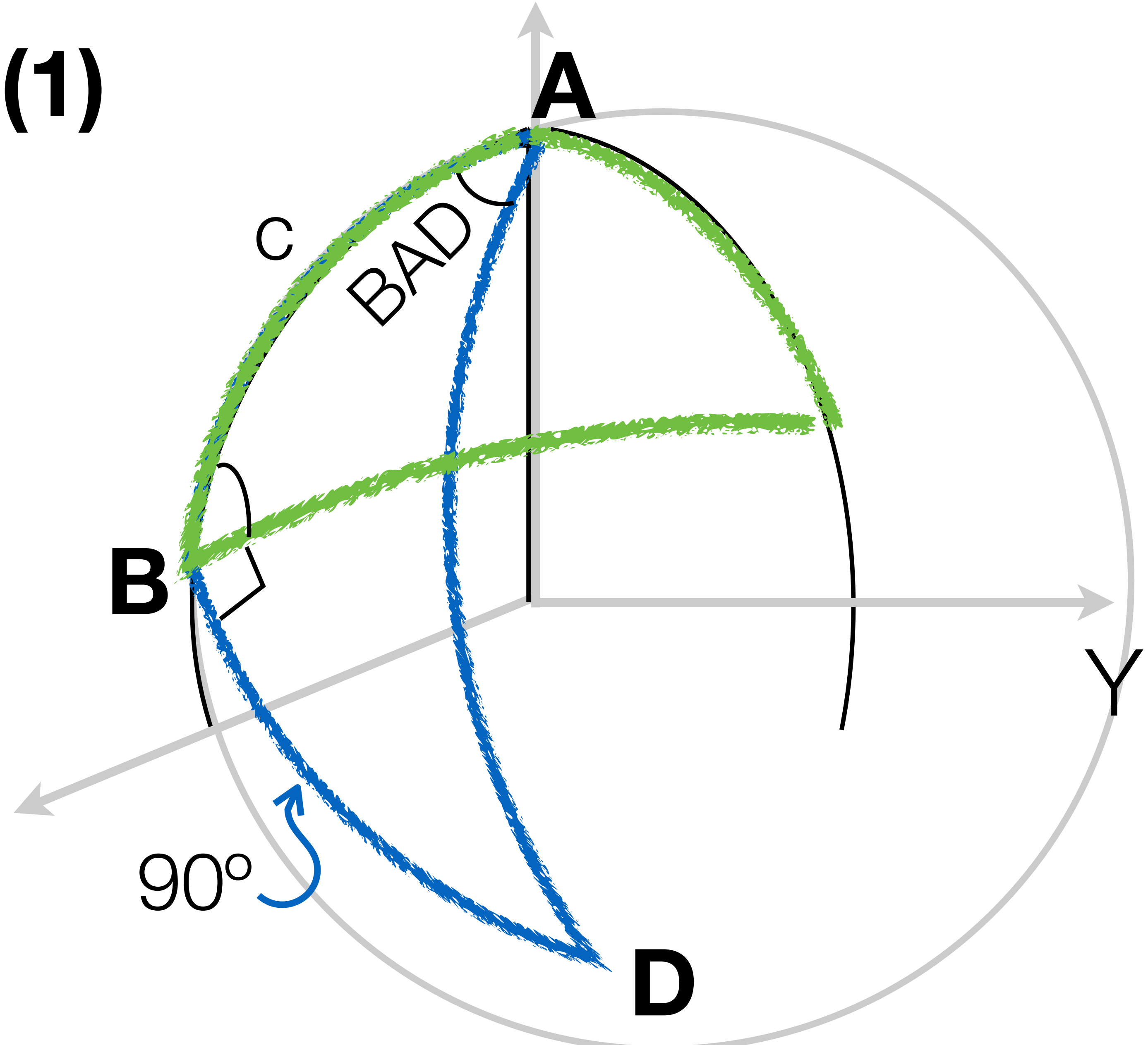
$$(sin a)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \quad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\hat{r}_D = (\cos BAD \sin AD, \sin BAD \sin AD, \cos AD)$$

no sabemos nada de AD o BAD, solo sabemos que

ABD = B +90º



- aplicar las fórmulas del coseno y seno nos permite relacionar los ángulos AD y BAD que no conocemos con los que sí (a,b,c,A,B,C)

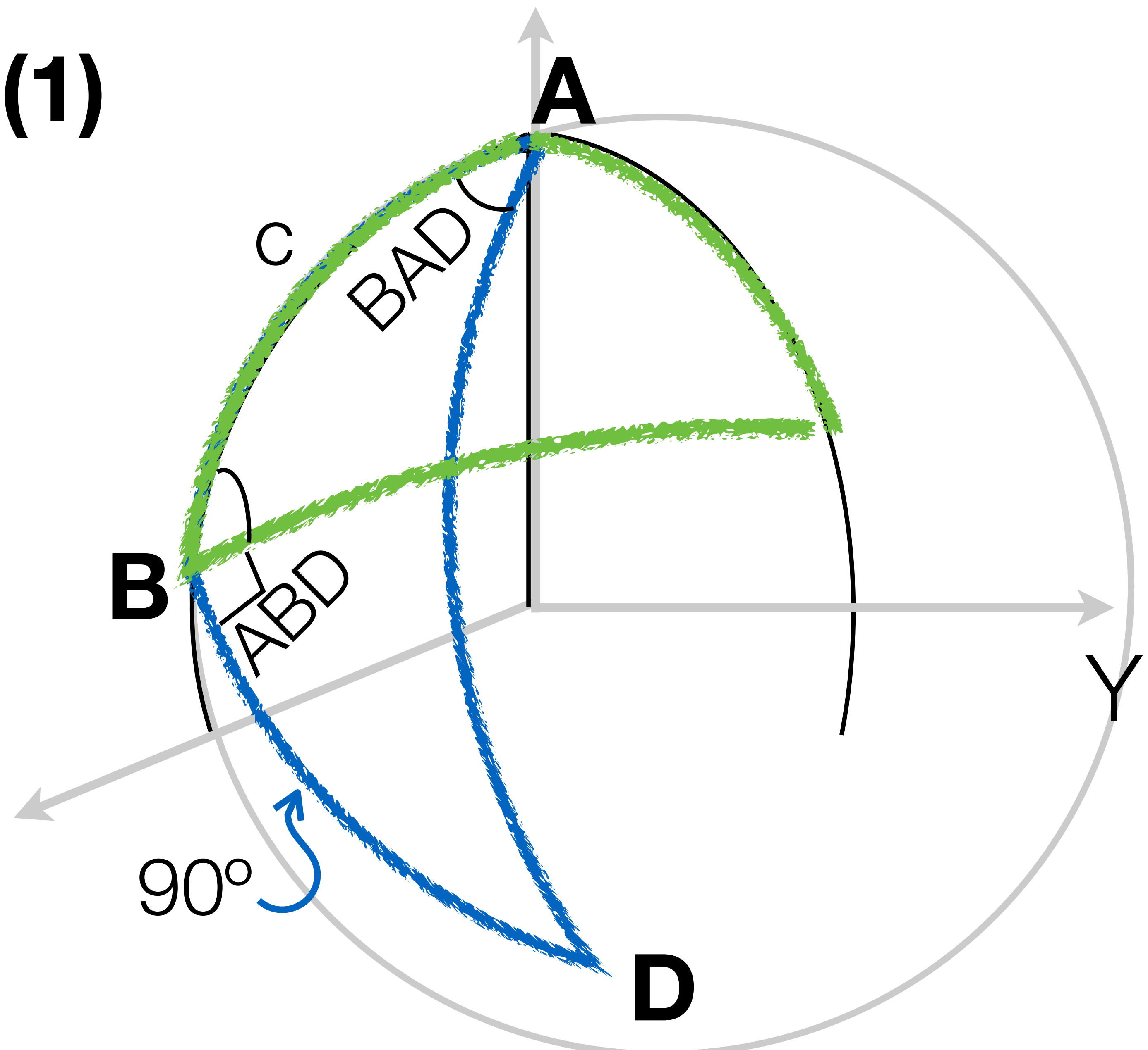
$$(\sin a)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\hat{r}_C = (\sin BAD \cos AD, \sin BAD \sin AD, \cos AD) \qquad \textbf{(4)}$$

no sabemos nada de AD o BAD, solo sabemos que

ABD = B +90º



- aplicar las fórmulas del coseno y seno nos permite relacionar los ángulos AD y BAD que no conocemos con los que sí (a,b,c,A,B,C)

fórmula del seno para ABD:

$$\sin ABD / \sin AD = \sin BAD / \sin 90^{\circ}$$

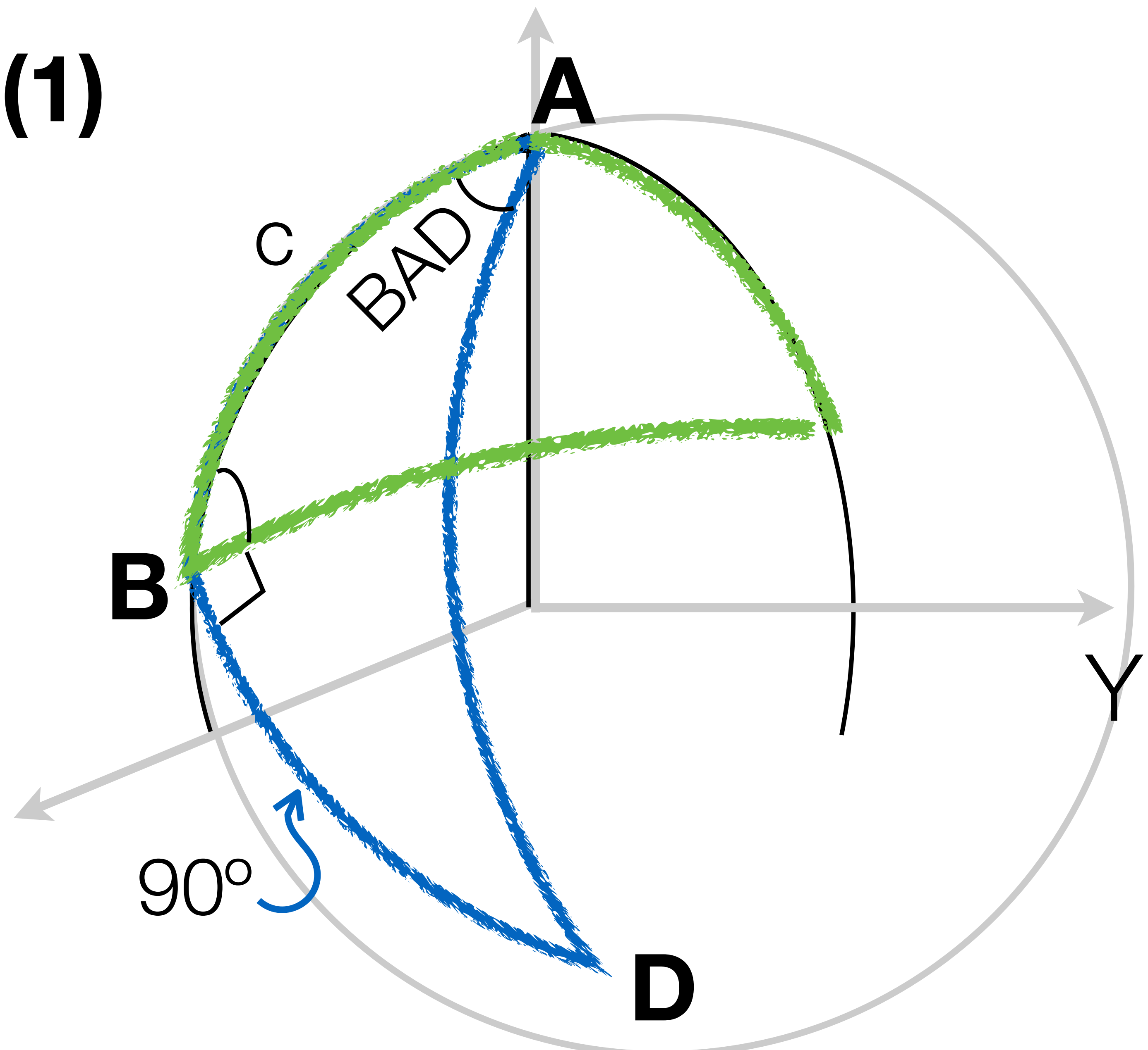
$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \quad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\hat{r}_C = (\cos BAD \sin AD, \sin BAD \sin AD, \cos AD)$$

no sabemos nada de AD o BAD, solo sabemos que

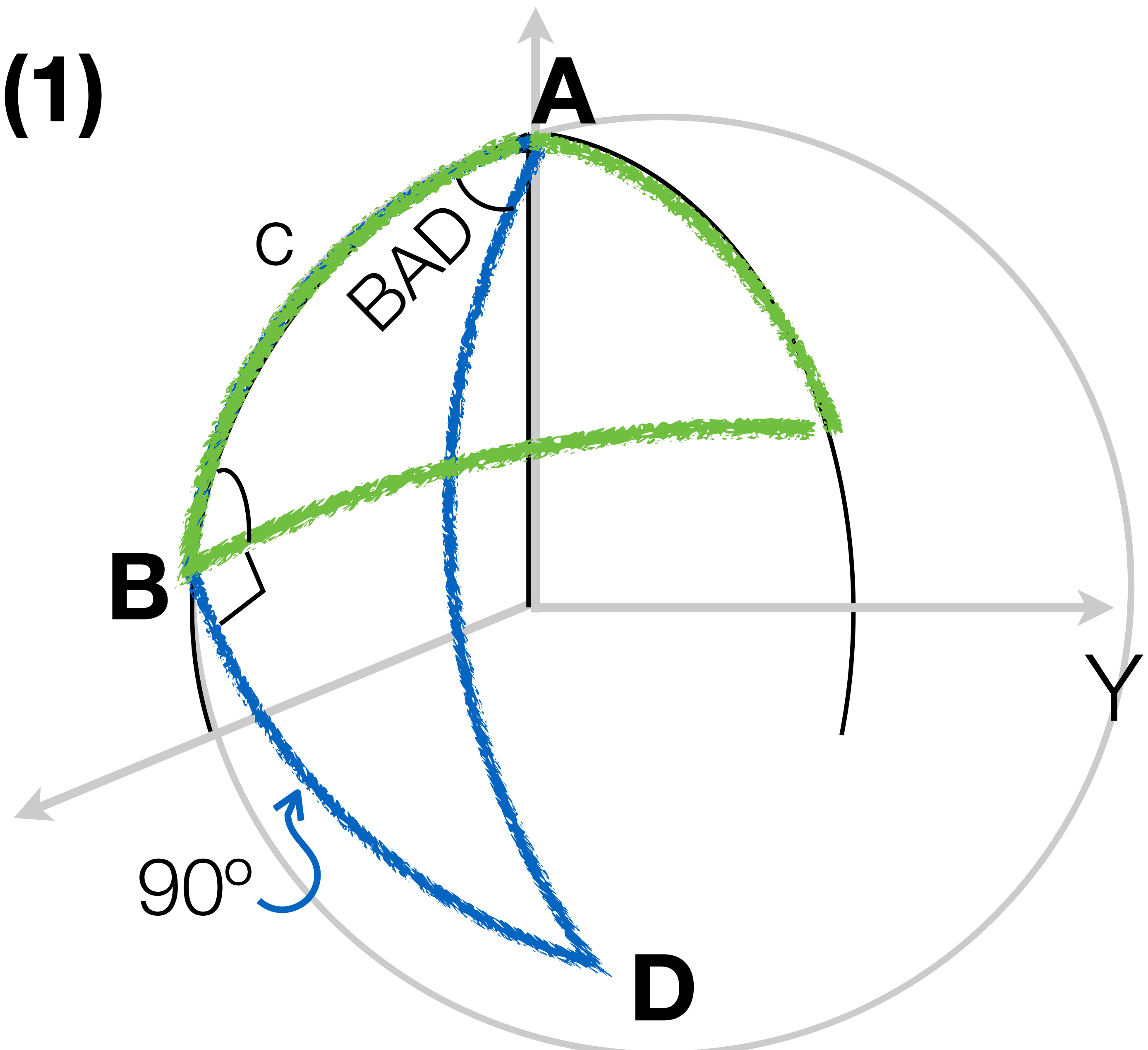
ABD = B +90º



- aplicar las fórmulas del coseno y seno nos permite relacionar los ángulos AD y BAD que no conocemos con los que sí (a,b,c,A,B,C)

fórmula del seno: $\sin ABD / \sin AD = \sin BAD$

$$(sin a)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$



- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\hat{r}_D = (\sin BAD \cos AD, \sin BAD \sin AD, \cos AD) \qquad \textbf{(4)}$$

no sabemos nada de AD o BAD, solo sabemos que

ABD = $\boxed{}$

- aplicar las fórmulas del coseno y seno nos permite relacionar los ángulos AD y BAD que no conocemos con los que sí (a,b,c,A,B,C)

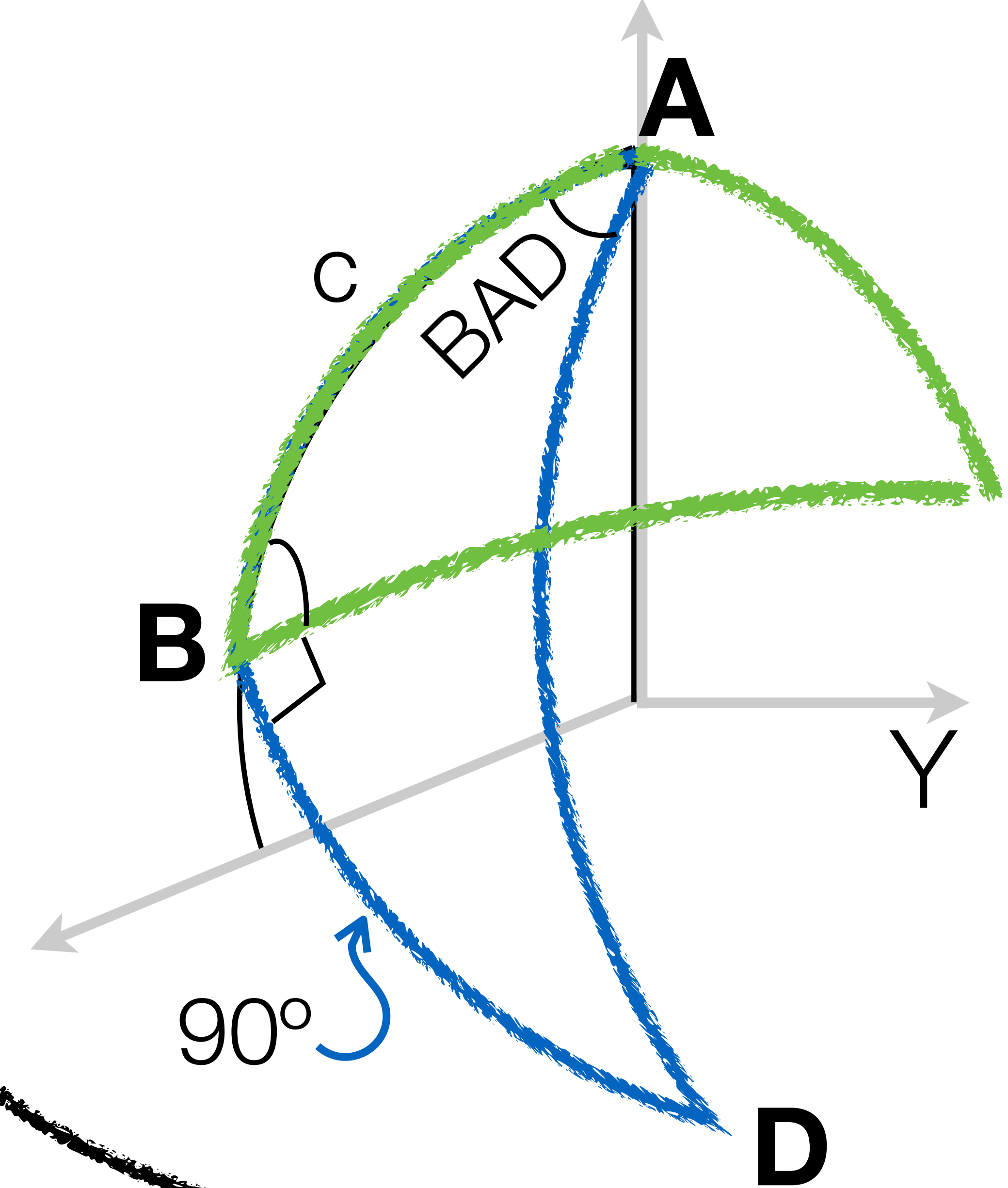
fórmula del seno: $\sin ABD/\sin AD = \sin BAD/\sin 90º$

$-\cos(B)/\sin AD = \sin BAD$

$$(\sin a)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \quad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\hat{r}_D = \begin{matrix}(\sin BAD \cos AD, \\ -\cos(B), \\ \cos AD)\end{matrix} \quad \textbf{(4)}$$



no sabemos nada de AD o BAD, solo sabemos que

$$ABD = B + 90^o$$

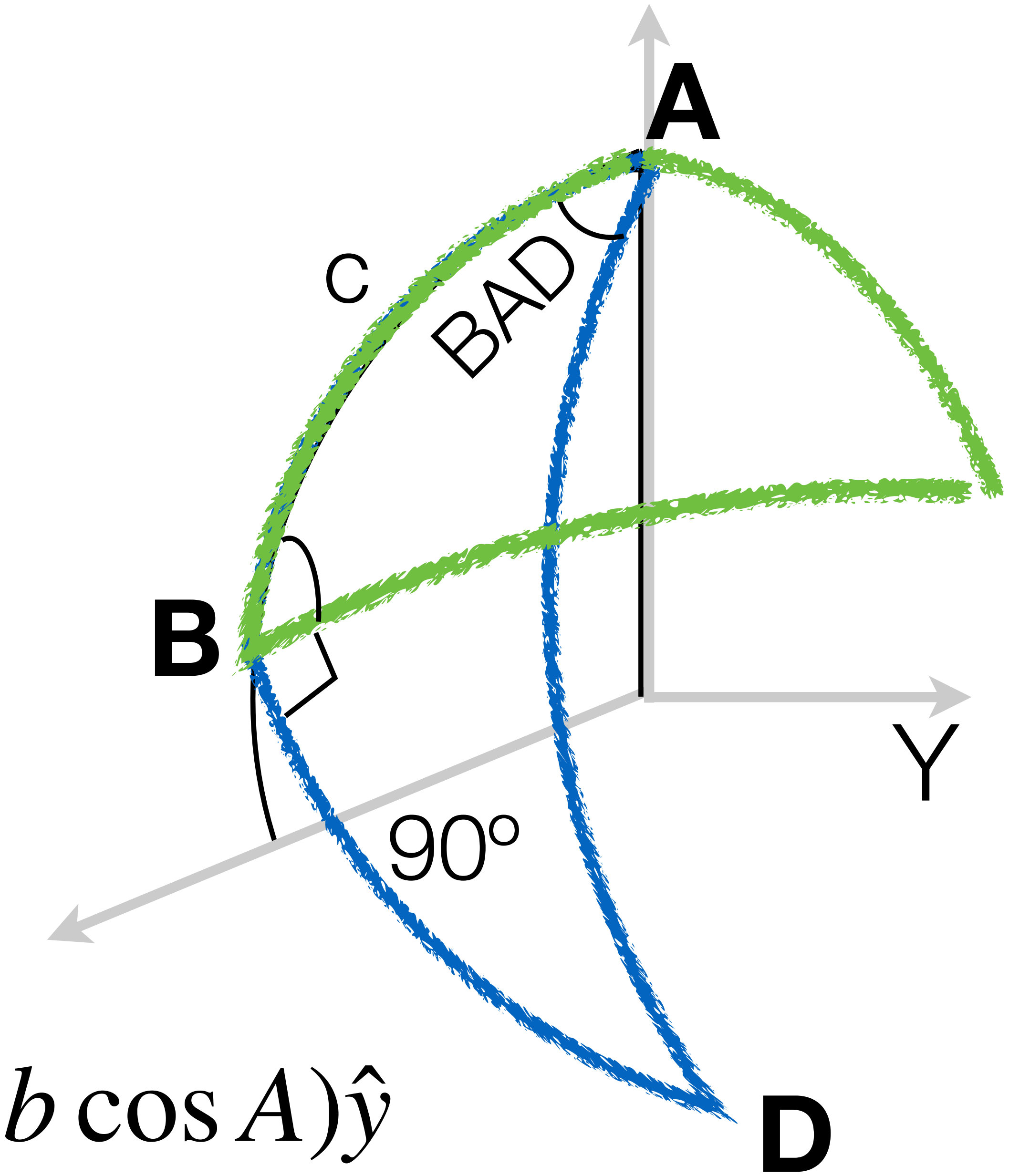
- aplicar las fórmulas del coseno y seno nos permite relacionar los ángulos AD y BAD que no conocemos con los que sí (a,b,c,A,B,C)

fórmula del seno: $$\sin(B+90^o)/\sin AD = \sin BAD/\sin 90^o$$
$$-\cos(B)/\sin AD = \sin BAD$$

$\sin(x+/-y)=\sin x \cos y +/- \cos x \sin y$

$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$

$$\hat{r}_D = \begin{matrix}(\sin BAD \cos AD, \\ -\cos(B), \cos AD)\end{matrix} \qquad \textbf{(4)}$$



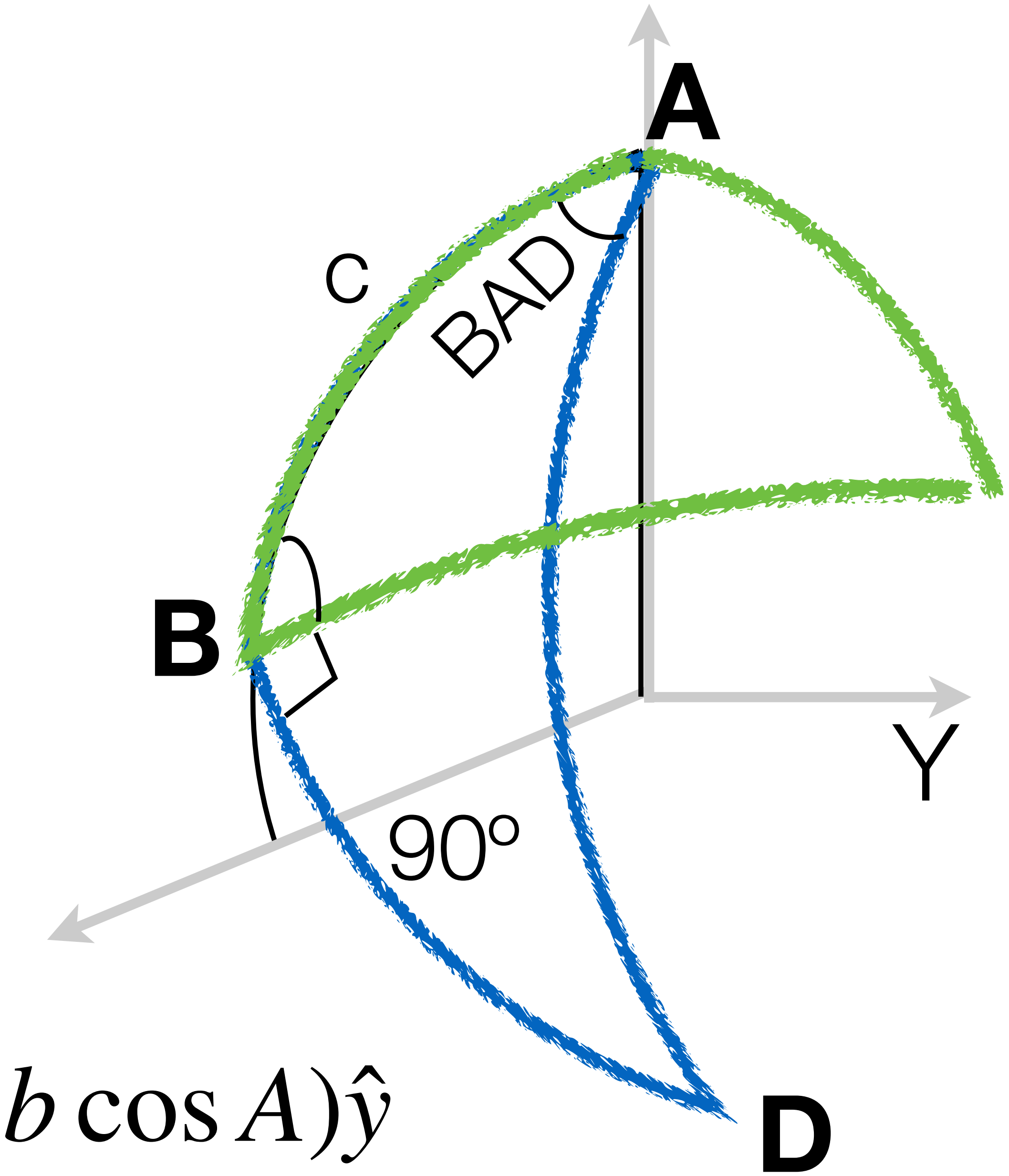
el lado derecho de la ec. es:

$$\begin{aligned}\hat{r}_C \times \hat{r}_B = & \cos c \sin b \sin A \hat{x} \\ & - \sin c \sin b \sin A \hat{z} \\ & + (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\hat{y}\end{aligned}$$

$$-\sin a \cos(B) = (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)$$

$$(sin a)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$

$$\hat{r}_D = \begin{array}{l}(\sin BAD \cos AD, \\ -\cos(B),\ \cos AD)\end{array} \qquad \textbf{(4)}$$



el lado derecho de la ec. es:

$$\begin{aligned}\hat{r}_C \times \hat{r}_B = {} & \cos c \sin b \sin A \hat{x} \\ & - \sin c \sin b \sin A \hat{z} \\ & + (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)\hat{y}\end{aligned}$$

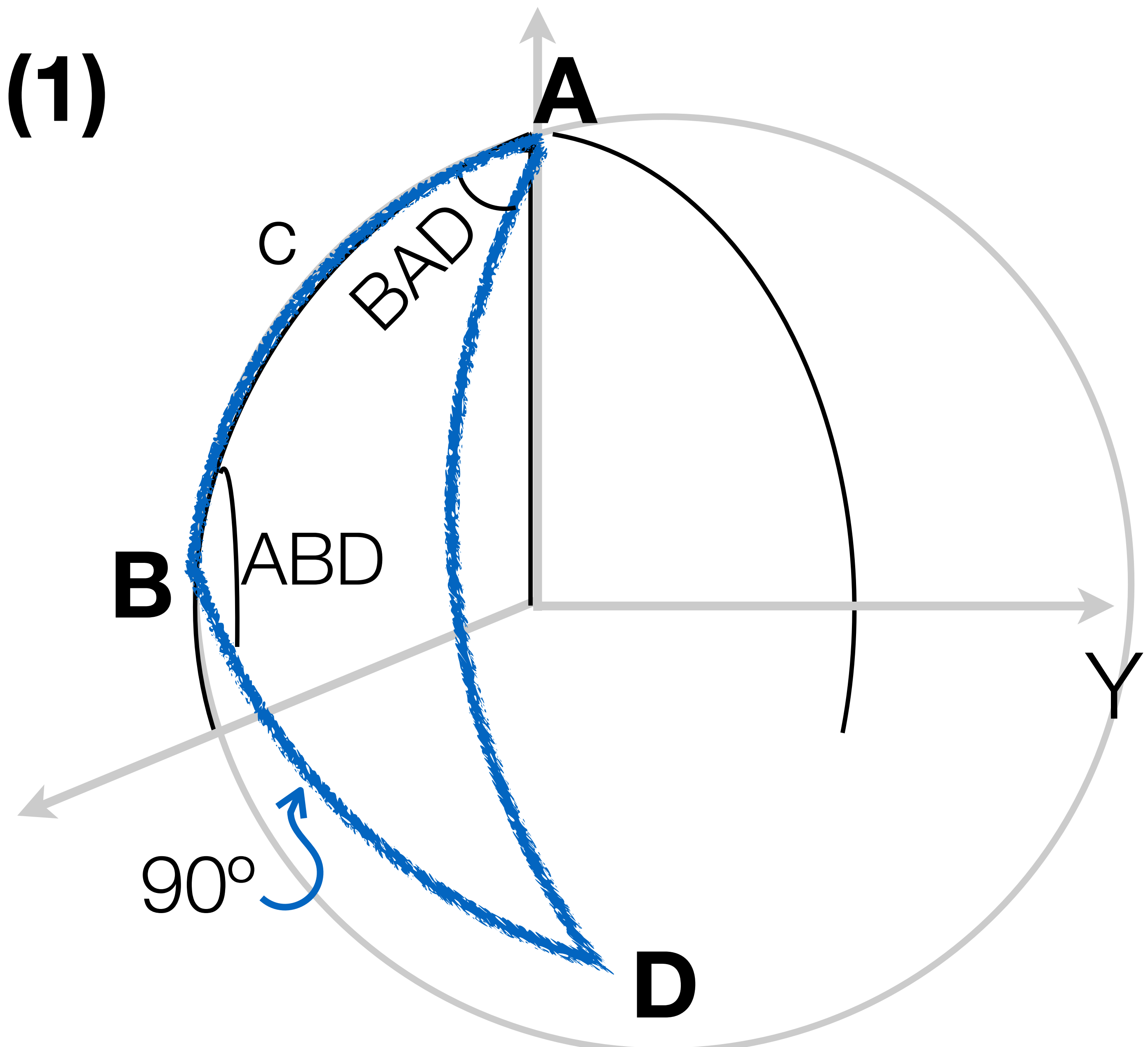
$$-\sin a \cos B = (\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A)$$

$$\boxed{\sin a \cos B = (\cos c \sin b \cos A - \sin c \cos b)}$$

$$(sina)\hat{r}_D = \hat{r}_c \times \hat{r}_B \qquad \textbf{(1)}$$

- veamos el lado izquierdo, para el polo D tenemos:

$$\theta = \text{AD} \qquad \psi = \text{BAD}$$



$$X = \sin\theta\cos\psi$$

$$Y = \sin\theta\sin\psi$$

$$Z = \cos\theta$$

$$\hat{r}_D = (\sin BAD \cos AD, \sin BAD \sin AD, \cos AD) \qquad \textbf{(3)}$$

TAREA: evaluar cosAD con la fórmula del coseno y sustituir en componente z de la ec. (1), sustituir (2) en la derecha —–> **fórmula del seno**

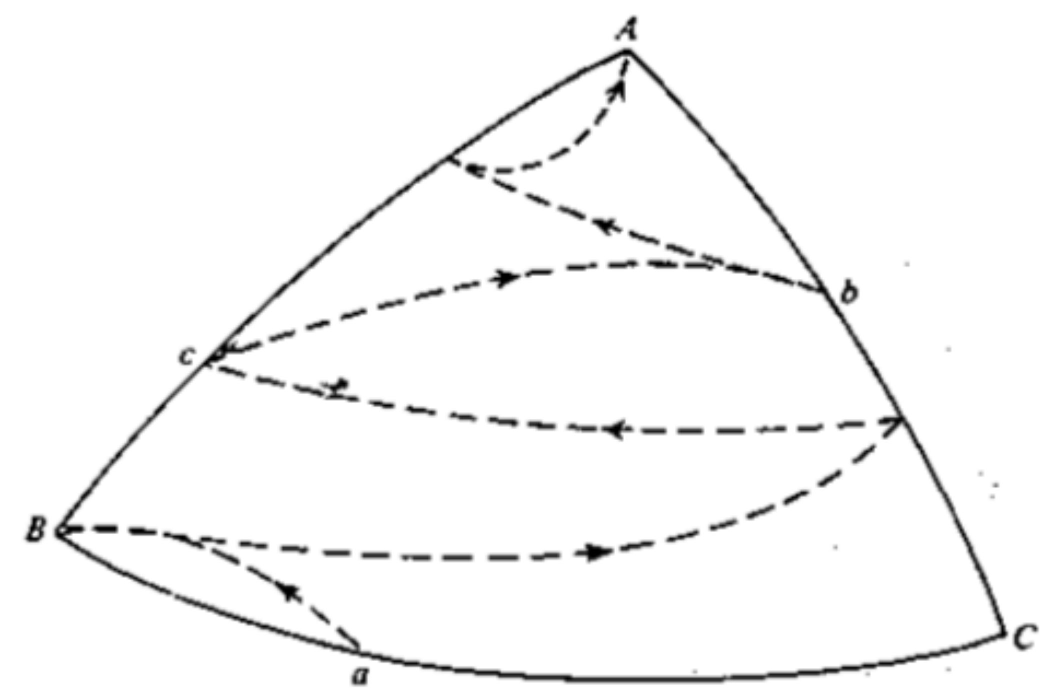
Fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

Fórmula del seno

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Figure 1.6



Fórmula análoga

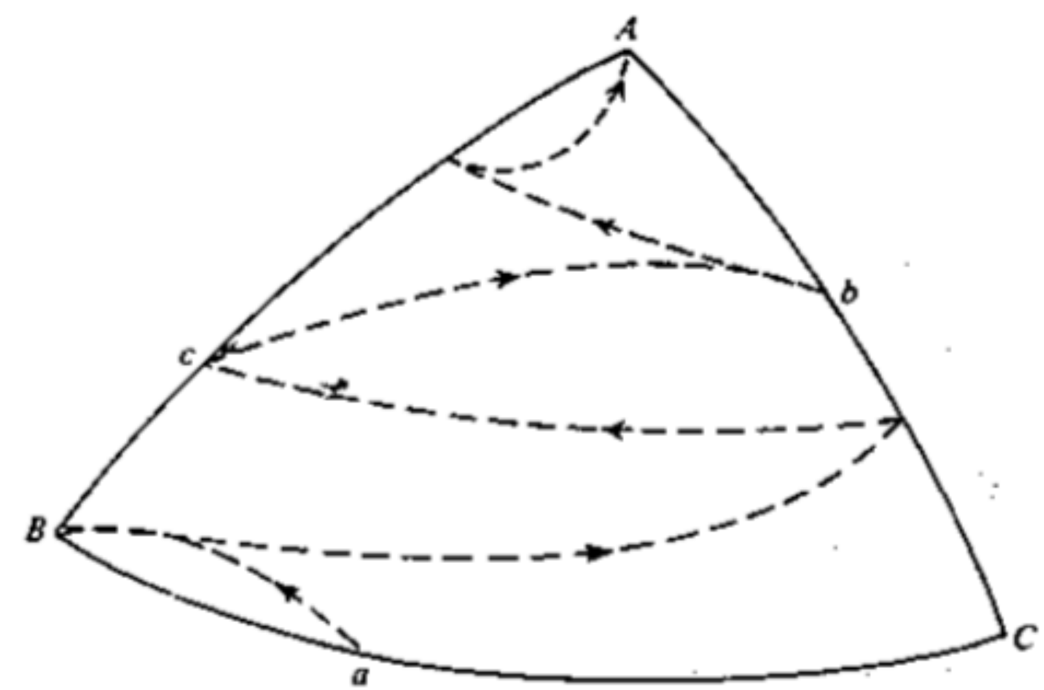
$$\sin a \cos B = (-\sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A)$$

Fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$

Fórmula del seno

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$



Fórmula análoga

$$\sin a \cos B = (\cos c \sin b \cos A - \sin c \cos b)$$

Fórmula de 4 partes

$$\cos a \cos C = (\sin a \cot b - \sin C \cot B)$$

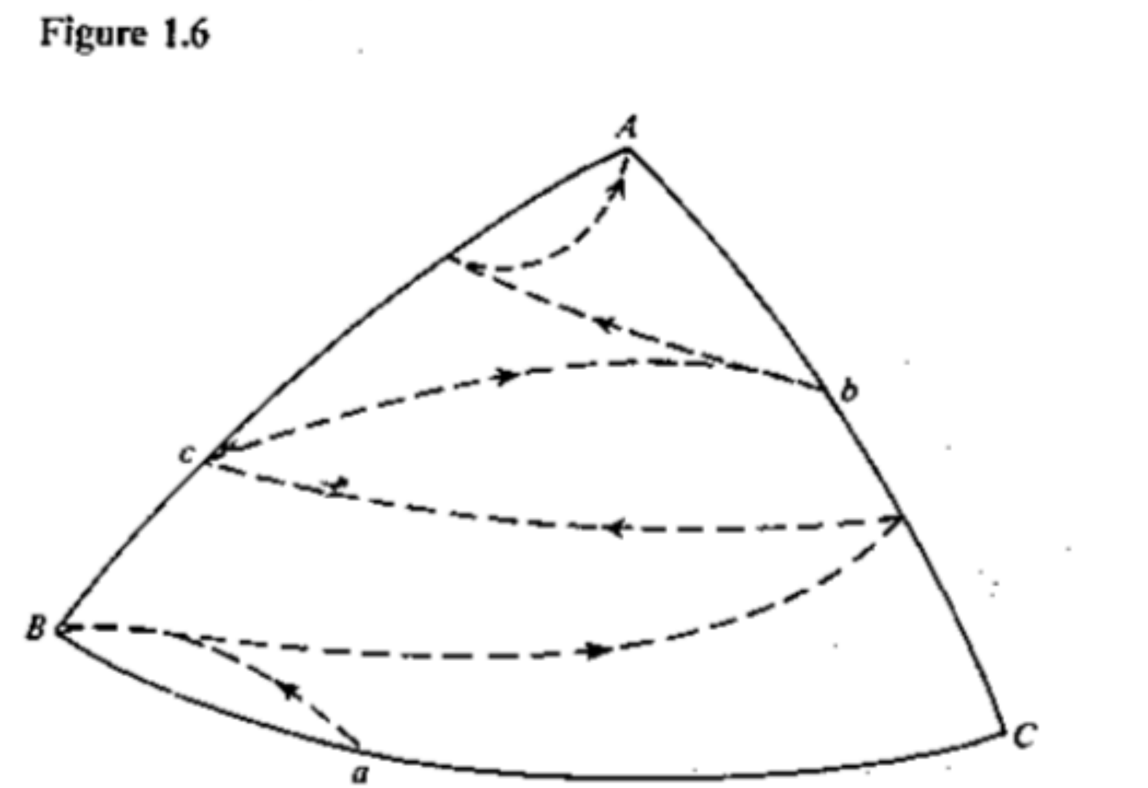
Fórmula de 4 partes

$$\cos a \cos C = (\sin a \cot b - \sin C \cot B)$$

ésta se obtiene operando con la Fórmula del coseno escrita para b y c (TAREA)

Fórmula del coseno

$$\cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$$



Fórmula del seno

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Fórmula análoga

$$\sin a \cos B = (\cos c \sin b \cos A - \sin c \cos b)$$

Fórmula de 4 partes

$$\cos a \cos C = (\sin a \cot b - \sin C \cot B)$$