Actividad 3: Descarga de tanque de fluido

Laboratorio de Física I

Primer semestre de 2021

Motivación

La mecánica de los fluidos forma parte de nuestra vida cotidiana. Desde el movimiento de mares o del viento, hasta el flujo de sangre que circula por nuestras venas. La extremada dificultad de su estudio radica en la complejidad de las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos. No obstante, sus aplicaciones son notables: desde generación de energía hidroeléctrica o eólica, hasta el vuelo de aviones o el análisis y tratamiento de aneurismas cerebrales. En esta práctica, estudiamos el problema de descarga de un recipiente contenedor de un fluido, cuando se le hace un pequeño orificio por donde drena. Notar que, por ejemplo, el problema no dista demasiado del suministro de suero a un paciente (salvando las distancias), excepto que en el segundo caso el fluido desemboca en el sistema circulatorio de dicho paciente. En esta actividad usaremos la aproximación de fluido ideal para apoyarnos en principios más simples de la mecánica de los fluidos, pero que igualmente arrojan resultados que se encuentran en excelente concordancia con las observaciones experimentales.

El fenómeno de descarga

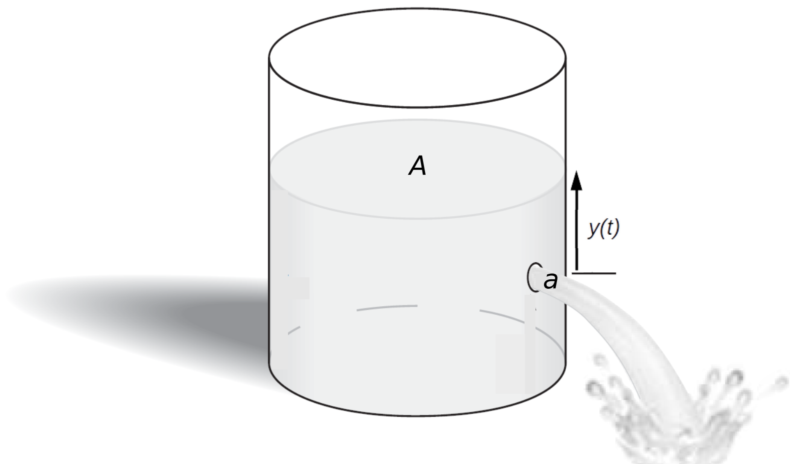

Figura 1: Esquema del tanque durante el proceso de descarga. El cociente entre el area del tanque A area del flujo saliendo a es el parametro principal para caracterisar la descarga en funcion del tiempo $y(t)$, elegimos el nivel de referencia $y = 0$ a la altura del orificio. Figura adaptada de [1].

El problema consiste en un tanque abierto, de paredes laterales verticales y de sección horizontal de área A, que contiene un fluido incompresible de densidad ρ hasta un nivel y_0, como se esquematiza en la Fig. 1. Al tanque se le hace un orificio en la pared lateral, a una altura $y = 0$ (menor que y_0), por donde escapa el fluido con un chorro de área a. El diametro del flujo es siempra más pequeño que el diametro del agurejo en la pared ya que el chorro se contrae por la curbatura de las lineas de flujo (ver figura 3).

En esta actividad se propone analizar cómo evoluciona $y(t)$ en función del tiempo, y estudiar su correlación con el modelo teórico correspondiente.

1. Marco teórico

Para abordar el análisis del problema, haremos la hipótesis de que el fluido es un *fluido ideal* [1, 2], es decir, que cuenta con las siguientes cuatro características:

- el flujo es constante en el tiempo (flujo estacionario)
- el flujo es irrotacional (sin remolinos)
- el fluido es no viscoso (sin fricción interna o resistencia a fluir)
- el fluido es incompresible (densidad constante)

Bajo estas hipótesis se cumple la ecuación de Bernoulli, que es uno de los tres componentes del modelo teórico que utilizaremos:

- **Ecuación de Bernoulli** (Anexo A): es una aplicación del balance de la energía mecánica del fluido
- **Ecuación de continuidad** (Anexo B): como el fluido tiene densidad constante, si entra fluido a una región llena de ese fluido, la misma cantidad tiene que salir por otro lado.

A partir de estos principios se deduce que la altura del nivel de agua $y(t)$ en la Fig. 1 evoluciona con el tiempo según la siguiente ecuación:

$$\boxed{y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \alpha t\right)^2} \tag{1}$$

donde y_0 es la altura inicial del nivel del agua en el tanque (es decir, $y(t = 0) = y_0$) y hemos definido la constante $\alpha = \dfrac{a}{A}\sqrt{\dfrac{g}{2}}$

2. Guía experimental

Esta actividad se puede desglosar en los pasos siguientes:

1. Con una botella de plástico de sección uniforme y la cámara del celular, reproduzca el experimento de descarga en su casa y grabe un video (puede usar agua, e incluso agregarle colorante de cocina para mejorar el procesamiento de datos). Procure que el orificio sea circular y pequeño de tal forma que $a \ll A$. Tome la precaución de grabar una longitud de referencia para usar como escala (conversión de píxels a unidades de longitud).

2. Mida la altura del nivel de agua $y(t)$ en función del tiempo usando el software Tracker: https://physlets.org/tracker/, y creando los siguientes

   - crear un referencial con el origen en el orificio
   - crear una cinta de calibración
   - una masa puntual con seguimiento de trayectoria
   - una masa puntual con seguimiento de trayectoria
   - exportar los datos de tiempo t y altura del agua $y(t)$ en un sheet

3. Grafique $\sqrt{y(t)}$ en función del tiempo. ¿Qué tipo de gráfica espera obtener?

4. Ajuste sus datos por la función correspondiente y determine el coeficiente α_e experimental y su incertidumbre.

5. A partir del valor de aceleración gravitatoria $g = 9{,}81$ m·s^{-2}, y de las cantidades medidas A y a (medidas por el tracker), determine el coeficiente $\alpha_t = \dfrac{a}{A}\sqrt{\dfrac{g}{2}}$ teorico y su incertidumbre.

6. Compare α_t y α_e.

Anexo

En este anexo describimos brevemente los principios que rigen la mecánica de los fluidos bajo la hipótesis de que el fluido es ideal.

A. Ecuación de Bernoulli

Consideremos el esquema de la Fig. 2. Allí se representa el flujo de un fluido, que consideramos ideal, por una tubería rígida, de sección transversal circular y variable a lo largo de su extensión. El fluido llena toda la tubería en todo instante. Consideremos la línea de corriente que pasa por el centro de la tubería. Por lo tanto, podemos aplicar la ecuación de Bernoulli entre el punto 1, a la entrada de la tubería (sección A_1, presión p_1, altura y_1 y velocidad v_1) y el punto 2, a la salida (A_2, p_2, y_2 y v_2), y obtenemos:

$$p_1 + \rho_1 g y_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} = p_2 + \rho_2 g y_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} \tag{2}$$

donde además $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ porque el fluido es incompresible, de densidad ρ.

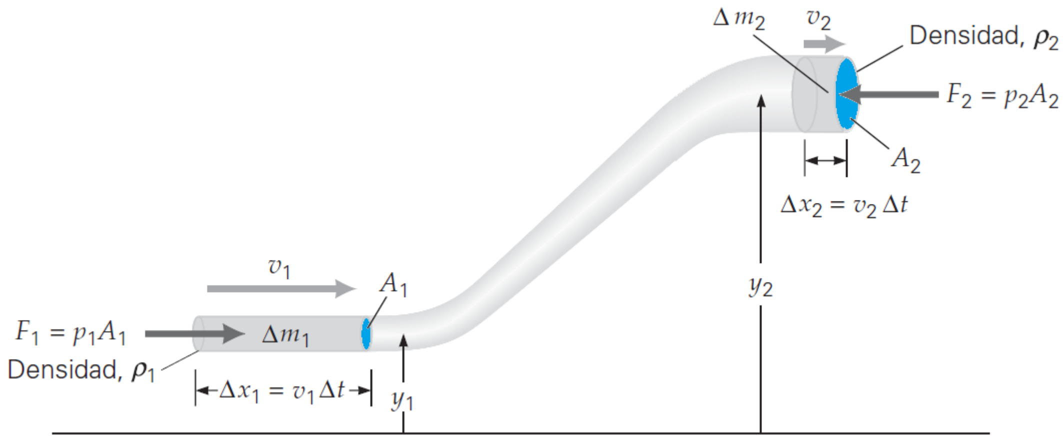

Figura 2: Tubería por donde fluye un fluido ideal. Consideramos que la tubería está llena de fluido en todo instante de tiempo. Figura adaptada de [1].

B. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es consecuencia de que el fluido es incompresible. Esto significa que su densidad ρ es constante, en cualquier parte de la tubería de la Fig. 2. La ecuación se puede utilizar para comparar las velocidades a la entrada y a la salida de la tubería:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{3}$$

En el caso de la Fig. 1, si llamamos v_2 a la velocidad con que desciende el nivel del agua en el tanque y v_1 a la velocidad con la que sale el fluido en forma de chorro de sección a, la Ec. (3) conduce a:

$$A v_2 = a v_1 \tag{4}$$

La seccion del chorro es mas pequeña que el orificio como se visualiza en la figura 3. Se puede introducir un factor de corrección para la ecuación de continuidad[1]. El hecho radica en que el fluido que baja y sale por el orificio del tanque en la Fig. 1 no tiene "tiempo suficiente" para doblar 90° (desde un movimiento vertical descendente, hasta un movimiento horizontal) y por lo tanto, el chorro con una sección a sale por un área del orificio *efectiva* a_o más pequeña. Dicho factor de reducción es el factor de contracción ($C_c = a/a_o$) [3, 4], y el fenómeno se esquematiza en la Fig. 3. Típicamente [3], el coeficiente de contracción es $C_c \approx 0{,}61$.

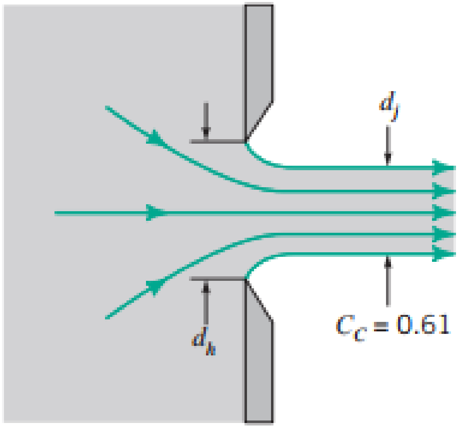

Figura 3: Esquema donde se ve la sección real del orificio de descarga (de sección a_o y diámetro d_h) y la sección efectiva por donde sale fluido (cuya área es a y su diámetro es d_j). El factor de contracción es $C_c = a/a_o \approx 0{,}61$ en la presente geometria.

Referencias

[1] Jerry D Wilson, Anthony J Buffa, and Bo Lou. *Física, Sexta edición.* Pearson Educación, 2007.

[2] Raymond A Serway, Chris Vuille, Jerry S Faughn, Víctor Campos Olguín, et al. *Fundamentos de física.* Number 530 530 S4F8 2010 S47F8 2010. 2010.

[3] JH Lienhard and JH Lienhard. Velocity coefficients for free jets from sharp-edged orifices. 1984.

[4] Wikipedia. Vena contracta — Wikipedia, the free encyclopedia. [Online; accessed 17-April-2021].

[1]Esta corrección es para la situación real (como en el experimento). En los ejercicios estándar que verá en el curso de Física I, esta corrección **no** se considerará, a menos que se especifique.