Imágenes por Resonancia Magnética 2021
Práctico V – Evolución de un sistema de espines

Ejercicio 1

Considere un electrón en reposo en presencia de un campo magnético oscilante:

$$\boldsymbol{B} = B_o \cos \omega t \ \hat{k}$$

a) Construya la matriz para el Hamiltoniano de éste sistema.

b) Al tiempo *t=0,* el electrón está en el estado de "spin-up" con respecto al eje *x* (es decir $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$). Determine $\chi(t)$ para cualquier tiempo *t* posterior. Preste atención ya que en éste caso se tiene un Hamiltoniano dependiente del tiempo, entonces no se puede calcular el estado a cualquier tiempo *t* de la manera habitual. Afortunadamente, en éste caso se puede resolver la ecuación de Schrödinger directamente.

c) Encuentre la probabilidad de obtener $-\hbar/2$ si se mide S_x. *Respuesta:*

$$sen^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega} sen(\omega t)\right)$$

d) Calcule el mínimo valor de B_0 que se necesita para forzar un giro completo en S_x.

Ejercicio 2

Considere una partícula de espín ½ en un campo magnético $B = (B_1 \cos \omega t \,, B_1 \sin \omega t \,, B_0)$.

a) Si la función de espín es $\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}$ escriba la ecuación de Schrödinger usando el cambio de variables $\psi_\pm(t) = e^{\mp i\omega_0 t/2}\phi_\pm$.

b) Defina $\xi_-(t) = e^{i(\omega_0-\omega)t}\phi_-$ y halle la expresión de $\xi_-(t)$.

c) Obtenga $\psi_\pm(t)$.

d) Si $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcule $\psi_\pm(t)$.

e) Obtenga la fórmula de Rabi de éstos resultados.

Ejercicio 3

a) Sea $f(x)$ una función expandible usando series de Taylor. Muestre que:

$$f(x+x_0) = e^{i\,\hat{p}\,x_0\,\varphi/\,\hbar} f(x)$$

(donde x_0 es una distancia constante). Por ésta razón, $\hat{p}/\hbar$ es llamado el generador de translaciones en el espacio.

b) Si $\psi(x,t)$ satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, muestre que:

$$\psi(x,t+t_0) = e^{-\frac{i\hat{H}t_0}{\hbar}} \psi(x,t)$$

(donde t_0 es un tiempo constante); $-\hat{H}/\hbar$ es llamado el generador de translaciones en el tiempo.

c) Muestre que el valor esperado de una variable dinámica $Q(x,p,t)$, a un tiempo $t+t_0$ se puede escribir como:

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \psi(x,t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(\hat{x},\hat{p},t+t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \psi(x,t) \rangle$$

Sugerencia: Haga $t_0 = dt$, y haga una expansión al primer orden en dt.

Ejercicio 4

a) Sea $f(\phi)$ una función expandible que depende del ángulo polar ϕ. Use series de Taylor y muestre que:

$$f(\phi+\varphi) = e^{i\,L_z\,\varphi/\,\hbar} f(\phi)$$

donde φ es un ángulo arbitrario. Por ésta razón, $L_z/\hbar$ es llamado el generador de rotaciones. De una manera más general, $\boldsymbol{L}\cdot\hat{n}/\hbar$ es el generador de rotaciones alrededor de la dirección $\hat{n}$, dado que exp $(i\boldsymbol{L}\cdot\hat{n}\,\varphi/\hbar)$ efectúa la rotación de ángulo φ (usando la regla de la mano derecha) alrededor del eje $\hat{n}$. En el caso del espín, el generador de rotaciones es $\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}/\hbar$. En particular, para el espín 1/2, $\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})\varphi/2}\chi$ efectúa la rotación del espinor.

b) Construya la matriz de 2×2 que representa una rotación de 180° alrededor del eje *x*. Muestre además que ésta matriz convierte un espín para arriba (χ_+) en un espín para abajo (χ_-) como es de esperarse.

c) Construya la matriz de rotación de 90° alrededor del eje *y*, y verifique cómo actúa sobre χ_+.

d) Construya la matriz de rotación de 360° alrededor del eje *z*, discuta las implicaciones.

e) Muestre que: $e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})\varphi/2} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i(\hat{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Ejercicio 5

Considere una población de espines en el estado “spin-up” en presencia de un campo de RF de frecuencia ω y un campo B_0 uniforme y constante.

a) En resonancia, calcule los tiempos para los cuales $N_{\uparrow} = N_{\downarrow}$ (número de espines en cada uno de los dos estados).

b) Calcule para qué frecuencias se puede esperar $N_{\uparrow} = N_{\downarrow}$, y los tiempos para los cuales esto ocurre en función de $\frac{|\Delta\omega|}{\omega_1}$.

c) Compare los tiempos a los que $N_{\uparrow} = N_{\downarrow}$ y $N_{\uparrow} = 0$.

Ejercicio 6

Considere un espín en presencia de un campo magnético externo de la forma $\boldsymbol{B} = B_0\hat{k}$. A continuación el espín recibe un pulso de radiofrecuencia de amplitud B_1 y frecuencia ω.

a) Calcule el estado de espín del sistema en función del tiempo *t*.

b) Si el espín se encuentra inicialmente en el estado χ_+ , calcule la posibilidad de encontrarlo en el estado χ_- en función del tiempo.

c) Responda de nuevo a la pregunta de la parte a) asumiendo que el pulso de radiofrecuencia está en resonancia con la frecuencia de Larmor del espín.

d) Calcule, en el caso anterior, la duración del pulso de radiofrecuencia para que la probabilidad de encontrar al sistema en el estado χ_- sea 100% (asuma que se encuentra inicialmente en el estado χ_+).

e) Responda a la misma pregunta de la parte b) asumiendo que el pulso de radiofrecuencia no está en resonancia con la frecuencia de Larmor del espín. Grafique para diferentes valores, y en particular los máximos en función de $\Delta\omega/\omega_1$.