**Física de Radiaciones I**
**Hoja 1 - 2020 - Instituto de Física**

1. Calcule la serie de Fourier de una onda sinusoidal rectificada:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & \operatorname{sen}(x) > 0 \\ 0, & \operatorname{sen}(x) < 0 \end{cases}$$

2. Escriba la función $f(x) = x$ en [0,1] como una serie en (a) cosenos, (b) senos y (c) senos y cosenos.

3. Repita el ejercicio anterior para $f(x) = x - 1$ definida en el intervalo [1,2].

4. Encuentre la relación entre los coeficientes de Fourier de la función periódica $f(x)$ de período $2L$ y la función $g(x) = f(x + a)$, donde $a$ es una constante.

5. Muestre que los coeficientes de Fourier de la serie escrita en términos de senos y cosenos satisfacen la desigualdad $|a_n|, |b_n| < M/n^2 \; \forall n$, con $M$ independiente de $n$.

6. a. Calcule $\int \delta(x^2 - 1) f(x) dx$ en función de $f(x)$.
b. Muestre que $\delta_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ define la "función" delta de Dirac.
c. Muestre que $x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x)$.
d. Muestre que $\int \delta'(x) f(x) dx = -f'(0)$.

7. Muestre que en coordenadas esféricas $\delta(\vec{r_1} - \vec{r_2}) = \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \delta(\phi_1 - \phi_2)$

8. Muestre que $\int e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k^2} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$

9. Calcule la trasformada de Fourier de las funciones ($a > 0$)

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad f(x) = e^{-ax^2}, \quad f(x) = e^{-a|x|}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

10.
a. Calcule las transformadas de Fourier de $f(x)$ y la misma trasladada $f(x - a)$. Aplique a $\delta(x)$ y $\delta(x - a)$.
b. Considere ahora una función "peine", suma infinita de deltas de Dirac: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n\Delta x)$. Muestre que su transformada es también un peine en el espacio de Fourier de período.
c. Muestre que la transformada de Fourier es real (imaginaria pura) si y solo si la función es par (impar).

11. Muestre que se cumplen las siguientes propiedades para F(y), transformada de Fourier de una función $f(x)$:

$$TF[f(-x)](y) = F(-y), \qquad TF\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right](y) = aF(ay), \qquad si\ a > 0,$$
$$TF[f(x-b)](y) = e^{-iby}F(y), \qquad TF[f(x)e^{-bx}](y) = F(y-b)$$