Recorridos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

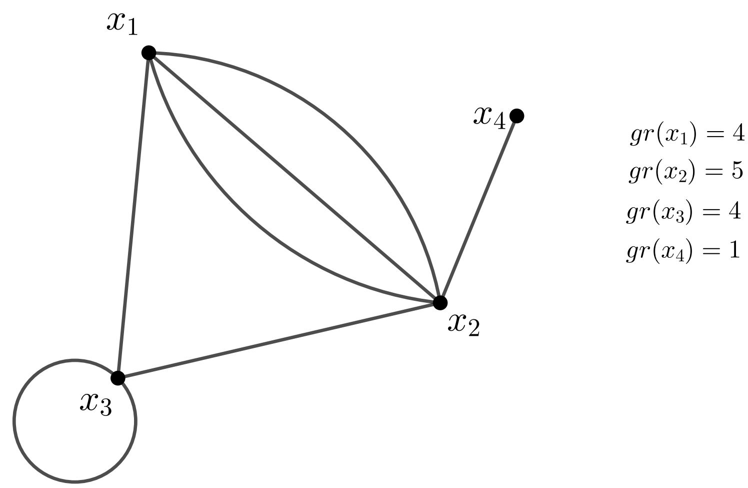
Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Recordamos el problema de los puentes de Königsberg: se trata de encontrar (o probar la inexistencia de) un circuito que pase por todas las aristas de un multigrafo.

Diremos que un recorrido o un circuito en un multigrafo (no dirigido) G es **Euleriano** si pasa por todas las aristas del multigrafo. La generalización del problema de los puentes de Königsberg puede enunciarse de la siguiente forma:

Problema 0.0.1. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo no dirigido conexo. ¿Existe un recorrido Euleriano en G? ¿Y un circuito Euleriano?*

El **grado** de un vértice x en un multigrafo G, notado por $gr(x)$, es el número de aristas que inciden en el vértice. Un lazo en x cuenta doble para el grado de x (se entiende que incide dos veces en el vértice x).



Proposición 0.0.2. *Si $G = (V, E)$ es un multigrafo, entonces*

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\#E.$$

Demostración. Simplemente observamos que cada lazo contribuye a sumar dos al grado de un vértice y cada arista que une dos vértices suma uno en el grado de cada uno de ellos. □

El siguiente teorema resuelve el Problema 0.0.1.

Teorema 0.0.3. *Un multigrafo conexo G admite un circuito Euleriano si y solo si el grado de todos sus vértices es par.*

Para simplificar la prueba, probaremos antes el siguiente resulado:

Lema 0.0.4. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo. Existe un vértice x_0 que no desconecta a G, es decir, tal que el subgrafo de G inducido por $V \setminus \{x_0\}$ es conexo.*

Demostración. Probaremos por inducción en $n = \#V \geq 2$ la siguiente propiedad ligeramente más fuerte: Dado un vértice $x_0 \in V$ existe otro vértice $x_1 \in V \setminus \{x_0\}$ que no desconecta a G. Esto es claro para $n = 2$.
Supongamos que es cierto para $m < n$ y tomemos $x_0 \in V$. Si $x \in V \setminus \{x_0\}$ tenemos dos casos: si x no desconecta a G, no hay nada más que probar. Si no es así, tomamos $G_1 = (V_1, E_1)$ una componente conexa del subgrafo inducido por $V \setminus \{x\}$ que no contiene a x_0 y luego $\tilde{G}_1$ el subgrafo inducido por $V_1 \cup \{x\}$. Como $\tilde{G}_1$ es conexo y tiene menos vértices que G, por hipótesis de inducción, tenemos $x_1 \neq x$ un vértice que no desconecta a $\tilde{G}_1$. Tenemos entonces que x_1 no desconecta a G y es diferente a x_0. □

Vamos ahora a la primera prueba del Teorema 0.0.3.

Demostración. ($\Rightarrow$) Asumimos que existe un circuito Euleriano y sea x un vértice de G. Notamos por E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Podemos suponer aquí que G no tiene lazos, puesto que si los tuviera esto no alteraría la existencia de un recorrido Euleriano ni la paridad de las aristas. Para cada vértice x, podemos escribir el circuito Euleriano con extremos en x:

$$(x = x_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n = x).$$

Llamemos E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Cada arista de E_x aparece exactamente una vez en el circuito. Alcanza entonces con verificar que la cantidad d earistas del circuito que inciden en x es par. Estas aristas son: e_1, e_{n-1} y por cada vez que aparezca x como vértice intermedio del circuito, un par de aristas consecutivas e_i, e_{i+1}.
Concluimos que $gr(x) = \#E_x$ es par.
($\Leftarrow$) Presentamos una prueba por inducción en la cantidad de aristas, que denotaremos por n. Se deja al lector observar que valen los primeros casos ($n = 1, 2, 3$).
Supongamos que tenemos un multigrafo conexo G con n aristas tal que todos sus vértices tienen grado par, y que todo multigrafo conexo con $m < n$ aristas que cumpla esta misma condición admite un circuito Euleriano.
Si G tiene un lazo, el multigrafo G' que resulta de quitarle a G dicho lazo admite un circuito Euleriano por hipótesis de inducción (puesto que es conexo con $n-1$ aristas).
Suponemos entonces a partir de ahora que no hay lazos en G.
Por el Lema 0.0.4, existe un vértice x_0 que no desconecta a G. Vamos a probar que existe un circuito C que empieza y termina en x_0.
Como $gr(x_0)$ es par y G es conexo y sin lazos, se tiene que existen vértices $v, w \neq x_0$ adyacentes a x_0. Como x_0 no desconecta a G, existe un camino simple c de v a w que no pasa por x_0. Si e es una arista entre x_0 y v, y f es una arista entre x_0 y w se tiene que $C = (x_0, e, c, f, x_0)$ es un circuito que empieza y termina en x_0.

Tomemos ahora G' el multigrafo que resulta de quitarle a G todas las aristas de C y los vértices que queden aislados luego de haber quitado esas aristas. El circuito C es un circuito Euleriano sobre sí mismo, por lo que $gr_C(v)$ es par para cada vértice v en C. Como para cada vértice x en G' se tiene

$$gr_G(x) = gr_{G'}(x) + gr_C(x),$$

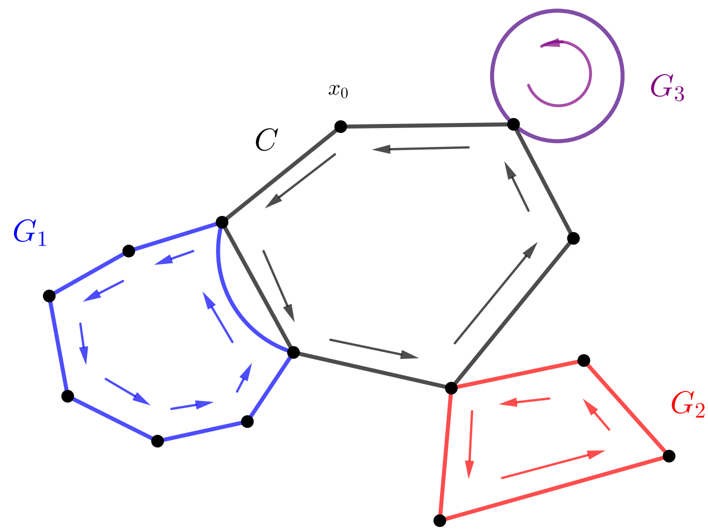
tenemos que G' tiene todos sus vértices de grado par.
Sean $G_1, \ldots, G_r$ las componentes conexas de G'. Tienen necesariamente menos aristas que G, además $gr_{G_i}(v) = gr_{G'}(v)$ es par, para cada v vértice de G_i. Por hipótesis de inducción, en cada G_i hay un circuito Euleriano C_i.

Consideramos el circuito C y suponemos que tenemos índices $j_1, \ldots, j_r$ tal que x_{j_i} es el primer vértice de G_i que aparece en el circuito C. Tomamos $\mathbf{c_i}$ un circuito Euleriano en G_i que comienza y termina en x_{j_i}.

Luego, construimos en G el ciclo

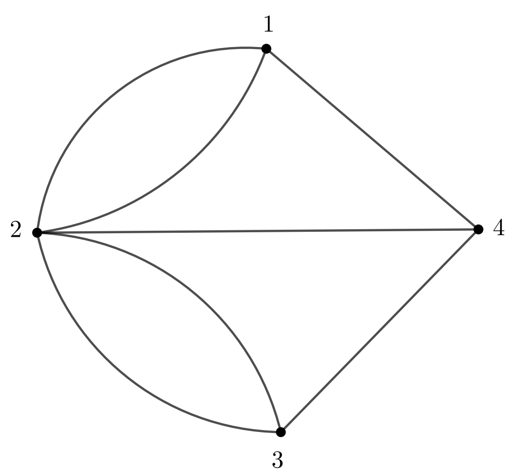
$$(x_0, e_1, \dots, e_{j_1-1}, \mathbf{c_1}, e_{j_1}, \dots, e_{j_r-1}, \mathbf{c_r}, e_{j_r}, \dots, x_m = x_0),$$

(como se ilustra en la figura). Este es necesariamente un circuito Euleriano pues pasa por todas las aristas de C y de los subgrafos $G_1, \dots, G_r$ y no repite vértices.



$\square$

Utilizando el Teorema 0.0.3 podemos rápidamente concluir la solución del problema de los puentes de Königsberg.



Vemos que $gr(1) = gr(3) = gr(4) = 3$ y $gr(2) = 5$, por lo que no puede haber un circuito Euleriano. Como se ve en el siguiente corolario tampoco puede haber un recorrido Euleriano abierto.

Corolario 0.0.5. *Un multigrafo conexo G admite un recorrido Euleriano abierto si y sólo si dos de sus vértices tienen grado impar y el resto tienen grado par.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un recorrido Euleriano $(x_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, x_n)$. Luego si agregamos al grafo G una arista que une x_0 con x_n tenemos que existe un circuito Euleriano. Por el Teorema 0.0.3 se tiene que el grado de todas las aristas de este nuevo grafo es par. Por lo tanto el grado de todas los vértices del grafo original G es par, salvo para x_0 y x_n, que tienen grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que x e y son los vértices que tienen grado impar. Se considera G' el grafo que resulta de agregarle una arista a G uniendo x on y. Luego los vértices de G' tienen todos grado par, por lo que existe un circuito Euleriano en G'. Es claro entonces que existe un recorrido Euleriano en G que une x con y. $\square$

0.0.1. Caminos y ciclos Hamiltonianos

Ejemplo 0.0.6. Un grupo de personas va al cine y quiere ocupar una hilera de manera tal que cada uno esté sentado al lado de alguien a quién conoce. ¿Será esto posible? ¿Cómo puede modelarse en términos de un grafo?
Notar que si tomamos el grafo que tiene como vértices a las personas y una arista que los une cada vez que las personas se conocen, se trata de encontrar un camino simple en el grafo, que pase por todos los vértices.

Del ejemplo anterior podemos extraer el siguiente problema: dado un grafo G, ¿existe un camino simple que pasa por todos los vértices? Un tal camino se denomina **camino Hamiltoniano**. Un camino Hamiltoniano cerrado se dice **ciclo Hamiltoniano**.
En esta sección no consideramos multigrafos, si no únicamente grafos puesto que un camino o ciclo Hamiltoniano solo puede pasar por una arista que une dos vértices dados, luego un multigrafo admite un camino o ciclo Hamiltoniano si y sólo si lo admite su subgrafo subyacente. Además, es claro que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el grafo no tiene lazos.
El problema de la existencia de caminos o ciclos Hamiltonianos en un grafo es más difícil que el de la existencia de recorridos y circuitos Eulerianos. Presentaremos algunas condiciones suficientes.

Una idea general que engloba a estas condiciones es la siguiente: cuanto más aristas haya en el grafo, más probable será que admita un camino o ciclo Hamiltoniano. Existe una condición necesaria en este sentido pues un camino Hamiltoniano en un grafo de n vértices debe pasar por $n-1$ aristas diferentes, por lo que el número de aristas totales no puede ser menor en ese caso. Esta es también una condición necesaria para que el grafo sea conexo.

Teorema 0.0.7. *Teorema de Ore, 1960*
Sea G un grafo sin lazos con n vértices.

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*

2. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano.*

Demostración. Empecemos probando la primera parte. Para eso veamos primero que G es conexo. Si no lo fuera tomamos dos componentes conexas G_1 y G_2 y dos vértices x e y, uno en cada una de estas componentes conexas. Si G_1 tiene n_1 vértices y G_2 tiene n_2 vértices, tenemos

$$gr(x) + g(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2,$$

lo que contradice la hipótesis.

Supongamos ahora que no existe un camino Hamiltoniano en G y tomemos un camino simple abierto de longitud máxima. Lo notamos

$$c = (x_1, \ldots, x_m).$$

Como estamos suponiendo que no hay caminos Hamiltonianos debe darse $m < n$.

<u>Afirmación</u>: Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de c.
Si x_1 o x_m es adyacente a algún vértice x fuera del camino c, entonces este puede prolongarse por alguno de los extremos, lo que contradice el hecho de que c tiene longitud máxima. Por otro lado, si x_1 y x_m son adyacentes no hay nada más que probar.
En otro caso, todos los vértices adyacentes a x_1 o x_m están en el conjunto $\{x_2, \ldots, x_{m-1}\}$.
Vamos a definir los siguientes conjuntos de índices:

$$S_1 = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_k \text{ es adyacente a } x_1\}$$

$$S_m = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_{k-1} \text{ es adyacente a } x_m\}.$$

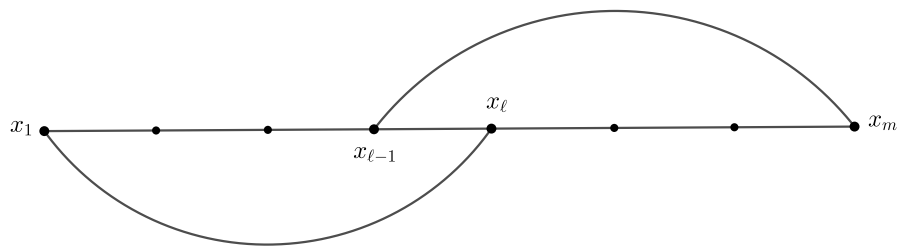
Como $gr(x_1) + gr(x_m) \geq n - 1$, entonces

$$\#S_1 + \#S_m \geq n - 3 > m - 3 = \#\{3, \ldots, m-1\},$$

lo que implica que $S_1 \cap S_m \neq \emptyset$. Tomamos $\ell \in S_1 \cap S_m$, luego x_ℓ es adyacente a x_1 y $x_{\ell-1}$ es adyacente a x_m. Obtenermos así el ciclo

$$(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_m, \ldots, x_\ell, x_1).$$

Esto prueba la afirmación.



Ahora reescribimos el ciclo de largo m obtenido en la afirmación de la forma $(y_1, \ldots, y_m, y_1)$. Como $m < n$ y G es conexo, existe un vértice del ciclo y_k que es adyacente a un vértice x fuera del ciclo. Entonces existe un camino simple

$$(x, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

que es más largo que el camino c tomado al principio. Esto es absurdo porque este último tiene largo máximo. Concluimos entonces que $m = n$ y por lo tanto c es un camino Hamiltoniano.

Para probar la segunda parte, observemos que, por la parte anterior, el grafo G admite un camino Hamiltoniano. Repitiendo el argumento utilizado para probar la afirmación, puede construirse un ciclo que pase por los mismos vértices que este camino Hamiltoniano. Este es claramente un ciclo Hamiltoniano. $\square$

Notar que los grafos C_n sirven de contraejemplo, para $n \geq 6$, para ambas partes del Teorema anterior.

Corolario 0.0.8. *Teorema de Dirac, 195*
Si $G = (V, E)$ es un grafo con n vértices tal que $\forall v \in V, gr(v) \geq \frac{n}{2}$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano