**Importante: comentarios sobre las resoluciones de más abajo.**

Ejercicio 1

a) También se puede razonar usando la fórmula 3.54 del Brown.

b) Usando la fórmula de la parte a), los pasos por los ángulos mínimos y máximos se calculan mediante un seno cuadrado, que tiene el doble del período del seno, de ahí que se use π y no 2π en los cálculos.

Ejercicio 2

a) Es más claro usar J/T/m3 en vez de kg/ms2T.

Ejercicio 3

Si se tiene B1 con polarización izquierda, en vez de derecha (hecho en clase), alcanza poner -w, y tener en cuenta que w1 y w0 son negativos, de forma que Omega = - w1 = |w1|, el resultado de las probabilidades da igual porque están al cuadrado, si sobra un signo negativo.

d) Lo que queda es el autoestado de Sx con valor propio -1, que tiene 1/2 de probabilidad según +-z.

# Parcial I - IRM (Solución)

$\boxed{2.}$ Consideramos protones contenidos en una muestra de agua, con $\gamma = \gamma_p$ para éstos protones.

a) ¿Cuál es la magnetización de equilibrio a $T = 309K$ y $B_0 = 3T$?

Para protones, usando $s = 1/2$ y la derivación cuántica de ley de Curie, tenemos:

$$M_0 \simeq \frac{1}{4} \rho_0 \frac{\gamma^2 \hbar^2}{K_B T} B_0$$ dónde usamos las siguientes

cantidades:
$$\begin{cases} \gamma \cong 2.675 \times 10^8 \, s^{-1} T^{-1} \\ \hbar \cong 1.054 \times 10^{-34} \, J \cdot s \\ K_B \cong 1.381 \times 10^{-23} \, m^2 kg \, s^{-2} K^{-1} \text{ (Cte. de Boltzman)} \end{cases}$$

Podemos estimar la densidad de protones $\rho_0$ sabiendo que tenemos una muestra de agua:

$$18g \text{ de agua} \longrightarrow 18 \, cm^3 \text{ de agua} \longrightarrow \underbrace{N_A}_{\text{núm. de Avogadro}} \text{ de moléculas de } H_2O$$

y cada molécula tiene 2 protones en los núcleos del $^1H$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{2 \times N_A}{18 \, cm^3} = \frac{2 \times N_A}{18 \times 10^{-6}} \frac{\text{protones}}{m^3} \simeq 6,692 \times 10^{28} \left[\frac{1}{m^3}\right]$$

Calculando obtenemos: $\boxed{M_0 \cong 9.3 \times 10^{-3} \left[\frac{kg}{m \, s^2 \underbrace{T}_{\text{tesla}}}\right]}$

b) Calcule el exceso relativo de espines. Para 1g de agua, calcule el exceso de espines total.

Para calcular el exceso total y relativo de espines, podemos usar la expresión aproximada:

$$\Delta N = N_+ - N_- = N \cdot \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_0}{K_B T} \Rightarrow \boxed{\frac{N_+ - N_-}{N} = \frac{\hbar \omega_0}{2K_B T} \cong 9{,}911 \times 10^{-6}}$$

Usamos $\rho_0$ para calcular el número de "espines" en 1g (1 $cm^3$) de agua:

$$N(1g) = \rho_0 \times 10^{-6} m^3 \simeq 6.692 \times 10^{22}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta N = N \cdot \frac{\hbar \omega_0}{2K_B T} \simeq 6.632 \times 10^{17}}$$

c) ¿A qué tiempo (en función de $T_1$) se recupera la magnetización longitudinal al 90%? asumiendo $\vec{M}(0) = M_0 \hat{y}$

Usamos la expresión:

$$M_z(t) = M_z(t_0) e^{-(t-t_0)/T_1} + M_0 (1 - e^{-(t-t_0)/T_1})$$

con $M_z(t_0) = 0$ y $t_0 = 0$

$\Rightarrow M_z(t) = M_0 (1 - e^{-t/T_1})$ y sea $t_1$ el tiempo transcurrido para el cual $M_z(t) = 0.9 M_0$

$$\Rightarrow 0.9 = 1 - e^{-t_1/T_1} \Rightarrow e^{-t_1/T_1} = 0{,}1 \Rightarrow \boxed{t_1 = -\ln(0.1) \cdot T_1}$$

d) ¿Cuál es el valor de $|\vec{M}|$ al tiempo calculado anteriormente?

Calculamos las componentes de $\vec{M} = \vec{M}_\perp + \vec{M}_\parallel$

con $|\vec{M}_\parallel| = M_z$ y $|\vec{M}_\perp|$ que cambia según $M_\perp(t) = M_\perp(0) e^{-t/T_2}$

y además $M_\perp(0) = M_0 \Rightarrow M_\perp(0) = M_0 e^{-t/T_2}$

Entonces: $|\vec{M}| = \sqrt{M_\perp^2 + M_z^2} \Rightarrow |\vec{M}(t_1)| = \sqrt{M_0^2 e^{-2t_1/T_2} + 0.9^2 M_0^2}$

$\Rightarrow |\vec{M}(t_1)| = M_0\sqrt{0.9^2 + e^{-2t_1/T_2}}$ y usando el valor de $t_1$ calculado en c) tenemos: $e^{-2t_1/T_2} = e^{2\ln(0.1)T_1/T_2}$

pero $T_1 = 2T_2 \Rightarrow e^{-2t_1/T_2} = e^{\ln(0.1)\cdot 4} = 0{,}1^4$

$\Rightarrow |\vec{M}(t_1)| = M_0\sqrt{0.9^2 + 0.1^4} \cong 0.9 M_0$

e) ¿Cuál es el número de vueltas que da $\vec{M}(t)$ alrededor del eje $z$ hasta recuperar el valor longitudinal $0.9M_0$, si $T_1 = 1s$?

Bajo las consideraciones hechas ($\gamma = \gamma_p$ y muestra homogénea) $\vec{M}(t)$ precesa alrededor del eje $z$ a la frecuencia $\omega_0 = \gamma_p B_0$ entonces, el número de vueltas dadas desde $t=0$ hasta $t=1$ será:

$$n.\ \text{revoluciones} = \frac{1}{2\pi}\omega_0 \cdot t_1 = \frac{1}{2\pi}\gamma_p B_0\left(-\ln(0.1)\cdot T_1\right)$$

reemplazando valores $T_1 = 1s$ $\Rightarrow$ $\boxed{n.\ \text{revoluciones} \cong 3\times 10^8}$

$\boxed{3}$ Consideramos protones en presencia de 2 campos:

$\vec{B}_1(t) = B_1(\cos(\omega t)\hat{x} - \text{sen}(\omega t)\hat{y}) = B_1\hat{x}'$

(polarización circular izquierda) y $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$

a) Consideramos los espines como momentos magnéticos "clásicos" e inicialmente alineados con $\hat{z}$

¿En resonancia, cuál es el tiempo mínimo necesario para que estén alineados según $-\hat{y}'$?

A la frecuencia de resonancia: $\omega = \omega_0 = \gamma_p B_0$

y el campo efectivo es $\vec{B}_{ef} = \vec{B}_1 = B_1 \hat{x}'$, entonces los momentos magnéticos "clásicos" de los espines rotan con respecto al eje $\hat{x}'$ en sentido horario a velocidad angular $\omega_1 = \gamma_p B_1$.

Para que estén alineados según el eje $-\hat{y}'$ precisamos un tiempo dado por: $\omega_1 t_1 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \gamma_p B_1 t_1 = \frac{3\pi}{2}$

Entonces: $\boxed{t_1 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\gamma_p B_1}}$

b) ¿Cuánto vale éste tiempo para $B_0 = 3T$ y $B_1 = 6\mu T$?

En resonancia tenemos $\omega = \gamma_p B_0 = 8.025 \times 10^8 \, Hz$ //

y $\boxed{t_1 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\gamma_p B_1} \simeq 2.9 \, ms}$

Ahora consideramos un espín cuántico inicialmente en el estado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en presencia de los campos $\vec{B}_0$ y $\vec{B}_1$.

c) ¿Cuál es la función de onda para éste estado?

Retomamos la función de onda deducida en clases:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta\omega}{\Omega}\right) e^{-i\Omega t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\omega + \Omega}{\omega_1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\Omega}\right) e^{+i\Omega t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\omega - \Omega}{\omega_1} \end{pmatrix}$$

En resonancia: $\Delta\omega = 0$ y $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \Delta\omega^2} = \omega_1$

$$\Rightarrow \boxed{|\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-i\omega_1 t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{i\omega_1 t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de medir $\pm\hbar/2$ según el eje $z$ al tiempo calculado en a)?

Llamemos $P_+$ y $P_-$ las probabilidades de encontrar $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$ respectivamente.

Entonces tenemos: $P_+(t) = |\langle + | \tilde{\Psi}(t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_1 \frac{t}{2}} + e^{i\omega_1 \frac{t}{2}}\right)\right|^2$

$$= |\cos(\omega_1 t/2)|^2$$

Análogamente encontramos $P_-(t) = |\operatorname{sen}(\omega_1 t/2)|^2$

Cómo habíamos obtenido en la parte a) $\omega_1 t_1 = \frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_+(t_1) &= \left(\cos\frac{3\pi}{2\cdot 2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ P_-(t_1) &= \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2\cdot 2}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}}$$

Ésto quiere decir que al "girar" el espín un ángulo $3\pi/2$ termina en una superposición "equitativa" entre los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$.

e) Considere, en resonancia, espines que se distribuyen de acuerdo a la función de onda de la parte c). Escriba la matriz de la matriz densidad para una muestra de éstos espines.

Habiendo calculado las probabilidades $P_+$ y $P_-$ dada la función de onda $|\vec{\Psi}(t)\rangle$, calculamos la matriz densidad de la siguiente manera:

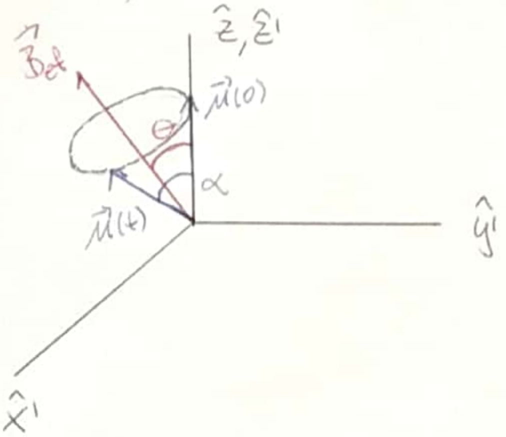
$$\rho(t) = P_+(t) \underbrace{|+\rangle\langle +|}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}} + P_-(t) \underbrace{|-\rangle\langle -|}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\end{pmatrix}$$

(en resonancia)

$\boxed{1}$ Considere un momento magnético $\vec{\mu}$ que se encuentra inicialmente orientado según $\hat{z}$. Se enciende un campo $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_0$, con $\vec{B}_1 = B_1 \hat{x}'$ y $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$. La dirección $\hat{x}'$ es la dirección del campo rotante: $\hat{x}' = (\cos(\omega t), -\operatorname{sen}(\omega t), 0)$

a) Calcule los ángulos máximo y mínimo de $\vec{\mu}(t)$ con

$\vec{\mu}(0)$ en función de $\omega_0$, $\omega_1$ y $\omega$.




Tenemos:

$$\vec{B}_{ef} = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\hat{z} + B_1\hat{x}'$$

y para el ángulo $\theta$ entre $\vec{B}_{ef}$ y $\hat{z}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\omega_1}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}} \quad \text{con} \quad \omega_1 = \gamma B_1 \text{ y } \omega_0 = \gamma B_0$$

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}\right)$$

El ángulo mínimo entre $\vec{\mu}(t)$ y $\vec{\mu}(0)$ se da para los tiempos $t_{min} = \frac{n2\pi}{\omega_{ef}}$ con $n$ un entero y $\boxed{\alpha_{min} = 0}$

El ángulo máximo entre $\vec{\mu}(t)$ y $\vec{\mu}(0)$ se da para los tiempos $t_{max} = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_{ef}}$ con $n$ entero y $\boxed{\alpha_{max} = 2\theta}$

b) Calcule los ángulos de la parte a) en resonancia.

En resonancia tenemos $\omega = \omega_0$, entonces:

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2}}\right) \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\alpha_{min} = 0\\ \alpha_{max} = \pi\end{array}}$$

c) Considere $B_0 = 3T$ y $B_1 = 6\mu T$. Calcule los tiempos entre 2 pasos consecutivos por el ángulo máximo.

c1) En resonancia

$$\omega_{ef} = \sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2} = \omega_1 = \gamma B_1 = 2{,}675\times10^8 \frac{1}{sT} \times 6\times10^{-6}\,T = 1{,}605\times10^3 \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\omega_{ef}} = \frac{\pi}{1{,}605\times10^3\ 1/s} \simeq \boxed{1{,}96ms}$$

c2) al 1% fuera de resonancia.

$$\omega_{ef} = \sqrt{(\omega_0 - 1.01\omega_0)^2 + \omega_1^2} = \sqrt{\omega_0^2\cdot(0.01)^2+\omega_1^2} = \gamma\sqrt{B_0^2\cdot(1.01)^2+B_1^2}$$

$$\simeq 8.105\times10^8\ 1/s$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\omega_{ef}} = \frac{\pi}{8.105\times10^8\ 1/s} \simeq \boxed{3.9\times10^{-7}s}$$