Planaridad

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraído y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

0.1. Grafos planos

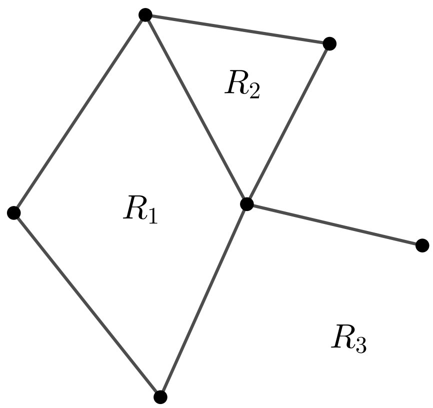
El segundo problema dado al principio del capítulo (conexión de servicios básicos) puede interpretarse de la siguiente manera: ¿Es posible dibujar en el plano el grafo bipartito $K_{3,3}$ de forma tal de no intersectar sus aristas?
Podemos preguntarnos más en general qué grafos es posible dibujar en el plano sin intersectar aristas. Vamos a dar una definición más precisa de esto.

Una **curva plana** es una función continua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que se escribe $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ donde las funciones $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ son continuas. Diremos en este caso que α **une** $x = \alpha(0)$ con $y = \alpha(1)$.
Para un par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\mathcal{C}(x,y)$ al conjunto de curvas planas que unen x con y. El conjunto de todas las curvas planas será notado $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. Una **representación plana** de un grafo (o multigrafo) $G = (V, E)$ es un par de funciones inyectivas $F : V \to \mathbb{R}^2$ y $H : E \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ tal que:

- $H(\{x,y\}) \in \mathcal{C}(F(x), F(y))$
- Si e_1 y e_2 son dos aristas distintas en E y $\alpha_1 = H(e_1)$ y $\alpha_2 = H(e_2)$, entonces $\alpha_1((0,1)) \cap \alpha_2((0,1)) = \emptyset$. Es decir que las imágenes de α_1 y α_2 pueden intersectarse solamente en los extremos.

Decimos entonces que el grafo G es **plano** (o **planar**) si admite una representación plana.
Cuando tengamos un grafo plano $G = (V, E)$ con una representación plana fijada (F, H), le llamaremos "vértice" tanto a los elementos de V como a los elementos de $F(V)$, y "arista" tanto a los elementos de E como a las imágenes de las curvas de $H(E)$.

Fijado un grafo plano junto con su representación plana observamos que los puntos del plano que no son vértices y no pertenecen a ninguna arista se distribuyen en lo que llamamos **regiones**. Podemos definir el **grado** de una región como la cantidad de aristas que la delimitan.

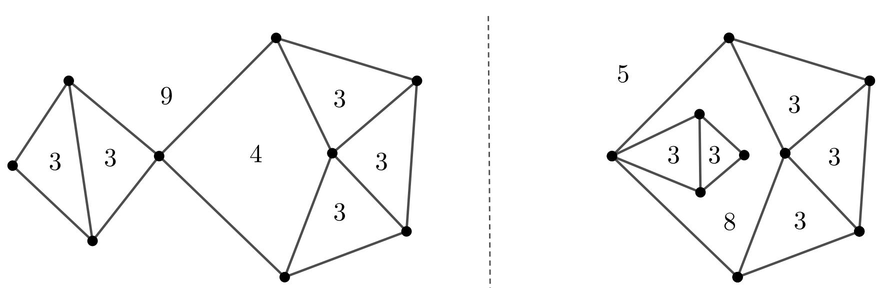


$gr(R_1) = 4$
$gr(R_2) = 3$
$gr(R_3) = 7$

Hay dos cosas a tener en cuenta en la definición del grado de una región:

1. Si una región está delimitada por un vértice de grado 1 que no es aislado, entonces la arista que incide en ese vértice cuenta como dos lados de la región. Esto es lo que sucede con la región no acotada R_3 de la figura anterior.

2. La definición de grado de una región no es intrínseca del grafo si no que depende de la representación plana. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo, en el que tenemos dos representaciones planas del mismo grafo. El grado de cada región es indicado en su interior.



0.1.1. Característica de Euler

Dado un grafo (o multigrafo) plano G notamos por $v(G)$ a la cantidad de vértices de G, por $e(G)$ a la cantidad de aristas de G y por $r(G)$ a la cantidad de regiones de G. (Esta última depende a priori de la representación plana.)
El siguiente teorema de Euler relaciona las cantidades anteriores para grafos planos.

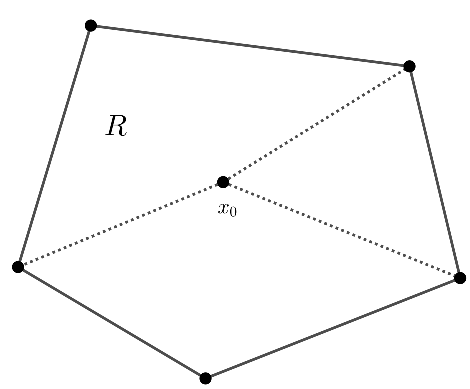
Teorema 0.1.1. *Sea G un grafo plano conexo sin lazos. Fijamos una representación en el plano de G. Entonces*

$$v(G) - e(G) + r(G) = 2. \tag{1}$$

Demostración. Lo haremos por inducción en el número de vértices n.
Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro. Supongamos ahora que la formula es cierta para todo grafo de n vértices y tomemos un grafo $G = (V, E)$ con $v = v(G) = n + 1$. Notamos también $e = e(G)$ y $r = r(G)$.
Tomemos $x_0 \in V$ un vértice que no desconecta el grafo y notemos G' al subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$. En este caso tenemos por hipótesis de inducción

$$2 = v(G') - e(G') + r(G') = (v - 1) - (e - gr(x_0)) + r(G'), \tag{2}$$

El vértice x_0 pertenece a una región R del grafo G'.



Supongamos que $gr(x_0) = k$.

- Si $k = 1$ entonces al agregar la única arista que incide en x_0 la región R no se divide, luego $r(G') = r$.

- Si $k > 1$, cada arista que incide en x_0 es borde de dos regiones diferentes de G y a la vez cada región de G tiene en su borde dos aristas diferentes que inciden en x_0, esto implica que R se divide en k regiones. Es decir que $r = r' + k - 1$. (Esto no cambia si R es la región no acotada).

Observar que en ambos casos la ecuación (2) implica que $v - e + r = 2$, luego por el principio de inducción queda demostrado el teorema. $\square$

Observación 0.1.2.
1. El teorema anterior muestra que la cantidad de regiones no depende de la representación plana si no sólo del grafo G.
2. Si permitimos lazos la fórmula (1) sigue siendo cierta. También es cierta para multigrafos (se deja como ejercicio).

Corolario 0.1.3. *Sea G un grafo plano sin lazos con $e = e(G) \leq 2$ (notamos también $v = v(G)$ y $r = r(G)$). Luego*

(1) $3r \leq 2e$

(2) $e \leq 3v - 6$

Demostración. El grado de cada región es al menos tres (porque G no es un multigrafo y no tiene lazos). Observamos que cada arista es borde o bien de dos regiones o bien es dos veces borde de una región, luego

$$2e = \sum_{R \text{ región}} gr(R) \geq 3r.$$

Esto prueba (1). Por el Teorema 0.1.1

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}a = v - \frac{1}{3}e,$$

lo que implica (2). $\square$

0.1.2. Grafos no planos

En este punto volvemos al segundo de los problemas presentados al principio del capítulo. La siguiente proposición responde a la pregunta planteada.

Proposición 0.1.4. *Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.*

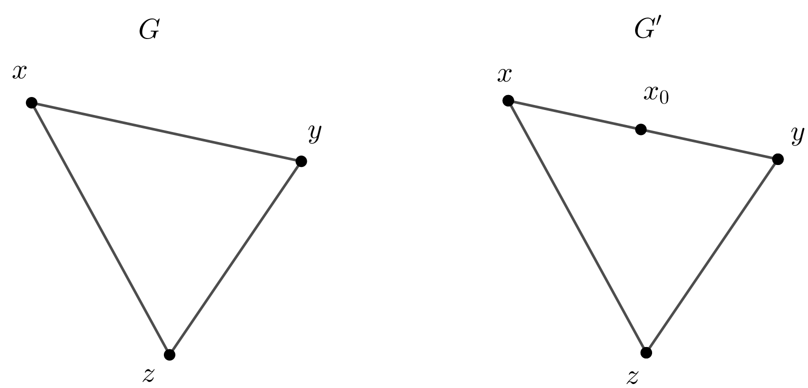
Demostración. Para ver que K_5 no es plano, alcanza con ver que si lo fuera, tendríamos $3v - e = 15 - 10 = 5$, lo que contradice 0.1.3.(2).

Para ver que $K_{3,3}$ no es plano, observemos que, si lo fuera, las regiones tendrían grado

par (porque los ciclos de un grafo bipartito son de largo par) y por lo tanto mayor o igual a 4. Además, usando la característica de Euler, se tiene que $r = 5$.
La suma de los grados de las regiones sería entonces mayor o igual a 20, y tendríamos $2e \leq 20$ mientras que $e = 9$. □

En realidad la proposición anterior es parte de un resultado más general que enunciaremos sin demostrar. Para esto necesitamos hacer primero algunas definiciones.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es una **subdivisión elemental** de G si $V' = V \cup \{x_0\}$ y existe un par de vértices $x, y \in V$ tal que $E' = (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, x_0\}, \{x_0, y\}\}$. Dicho de otro modo, G' se obtiene al dividir en dos una arista de G poniendo en esta un nevo vértice. De forma similar puede hacerse la definición para multigrafos.

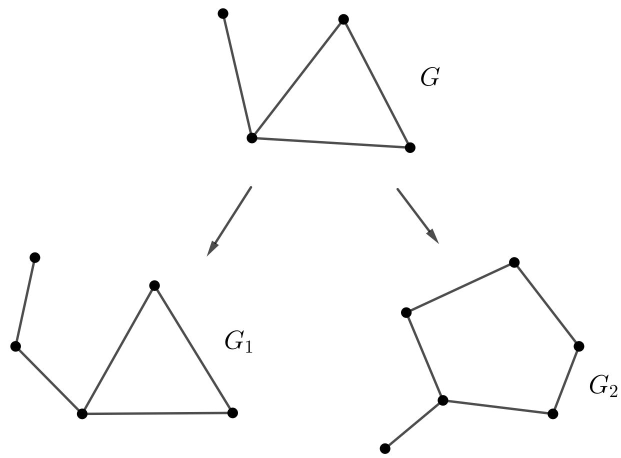


Un grafo G' es una **subdivisión** de otro grafo G si existe una secuencia finita de grafos

$$G_0 = G, G_1, \ldots, G_{k-1}, G_k = G'$$

tal que G_i es una subdivisión elemental de G_{i-1} para todo $i = 1, \ldots, k$.

Diremos que G_1 y G_2 son grafos (o multigrafos) **homeomorfos** si son subdivisiones de un mismo grafo G.



Observación 0.1.5.

- La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o multigrafos $\mathcal{G}$.
- La condición de planaridad se preserva por homeomorfismo, es decir que si G_1 y G_2 son homeomorfos, entonces G_1 es plano si y sólo si G_2 lo es.
- Todo multigrafo es homeomorfo a un grafo. Más precisamente todo multigrafo tiene una subdivisión que es un grafo. Luego el problema de la planaridad de multigrafos se reduce al caso de los grafos.

Habiendo definido estas nociones, estamos listos para enunciar el siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en la literatura, pero obviamos acá.

Teorema 0.1.6 (Kuratowski)**.** *Un grafo G es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.*