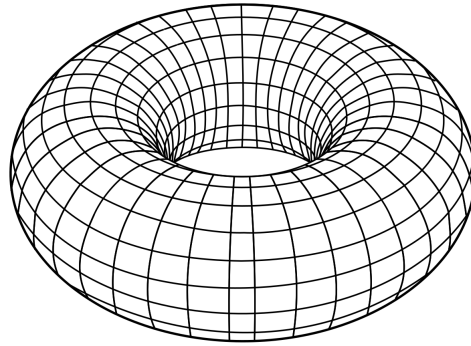


Práctico 10: Planaridad

- Un árbol es un grafo conexo sin ciclos (y por lo tanto sin lazos).
 - Una hoja de un árbol es un vértice de grado 1. Probar que todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.
 - Sea T un árbol con v vértices y e aristas. Probar, por inducción en v , que $e = v - 1$.
 - Probar que todo árbol es plano.
- Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?
- Mostrar que la fórmula de Euler no vale si G no es conexo. Adaptar la fórmula al caso desconexo agregando como parámetro el número de componentes conexas. Demostrar la fórmula escrita en base a la fórmula de Euler para grafos conexos.
- Mostrar que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?
- Probar que un grafo plano tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5.
- Probar que el grafo de Petersen no es plano (sugerencia: encontrar un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$).
- El toro es la superficie de revolución que se obtiene al rotar el círculo

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, (y - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

alrededor del eje z .



Decimos que un grafo es **tórico** si admite una representación en el toro.

- a) Mostrar que $K_{3,3}$ y K_5 son grafos tóricos e identificar la cantidad de regiones que definen.
- b) Calcular $v - e + r$ en cada caso.