# Electromagnetismo (2021)

## Práctico 1

### Herramientas matemáticas

1. El símbolo de Levi-Civita se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & si\ (i,j,k) \in \{(1,2,3),(3,1,2),(2,3,1)\} \\ 0 & si\ \ i=j, i=k, o\, j=k \\ -1 & si\ (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \end{cases}$$

   Muestre que si $\vec{A} = \sum_i A_i \hat{a}_i$ y $\vec{B} = \sum_j B_j \hat{a}_j$ son dos vectores entonces: $(\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} A_i B_j$

2. Muestre que la condición para que 3 vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ sean coplanares es:

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = 0$$

3. La indución magnética $\vec{B}$ se define mediante la fuerza que actúa sobre una partícula en movimiento con velocidad $\vec{v}$ de la siguiente manera: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Suponga que al realizar experimentos sobre una partícula cargada se encontró que:

   *a*) Si $\vec{v} = \hat{\imath}$ entonces $\vec{F} = q(2\hat{k} - 4\hat{\jmath})$

   *b*) Si $\vec{v} = \hat{\jmath}$ entonces $\vec{F} = q(4\hat{\imath} - \hat{k})$

   *c*) Si $\vec{v} = \hat{k}$ entonces $\vec{F} = q(\hat{\jmath} - 2\hat{\imath})$

   A partir de estos resultados halle la inducción magnética.

4. Una nube de electrones está confinada en una región entre dos esferas de radios $R_1$ y $R_2$, con una densidad volumétrica de carga dada por $\rho(\vec{r}) = -\frac{A}{r^4} cos^2(\phi)$. Halle la carga total entre las esferas.

5. En el interior de los materiales dieléctricos existe una magnitud vectorial llamada polarización, que corresponde a la densidad de momentos dipolares eléctricos por unidad de volumen $\vec{P}(\vec{r})$. En una varilla cilíndrica de radio $a$ y altura $h$, con su eje según el eje $z$, existe una polarización que varía con la distancia al eje $z$, que llamaremos $\rho$ (en coordenadas cilíndricas), y el ángulo azimutal $\phi$, que cumple $\vec{P}(\vec{r}) = a\rho cos^2(\phi)\hat{e}_\rho$, donde $\hat{e}_\rho$ es un versor según la dirección $\rho$. Calcular la polarización total (también llamado momento dipolar) $\vec{p}$ de la varilla.

6. Un dipolo eléctrico $\vec{p}$, ubicado en el origen de coordenadas, crea un potencial electrostático $\Phi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Calcular el campo eléctrico del dipolo sabiendo que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$.

7. Calcule el gradiente $\vec{\nabla} f(r)$ con $f(r)$ una función escalar que depende de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

8. Calcular:

   *a*) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

   *b*) $\vec{\nabla} \cdot (f(r)\vec{r})$

   *c*) $\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r})$

   ¿Cuánto vale la divergencia del campo Coulombiano?

9. Calcule el flujo del campo eléctrico generado por una carga puntual a través de una esfera de radio $R$ centrada en la carga. Compare este resultado con la divergencia del campo Coulombiano. ¿Contradice esto el teorema de la divergencia?

10. Considere un campo vectorial de la forma $\vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^3}$. Calcular el flujo de este campo a través de la superficie lateral de un cilindro de radio $a$ con su eje sobre el eje $z$ y su altura entre $-a$ y $a$.

11. Muestre que para cualquier vector $\vec{v}$ y cualquier función escalar $f$, siempre se cumple:

    *a*) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$

    *b*) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$

12. ¿Cuál es la densidad de carga de un cascarón esférico uniforme y de espesor infinitesimal de radio $R$ y carga total $Q$ centrado en el origen?

13. Mostrar que $\vec{\nabla}^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\vec{r})$.