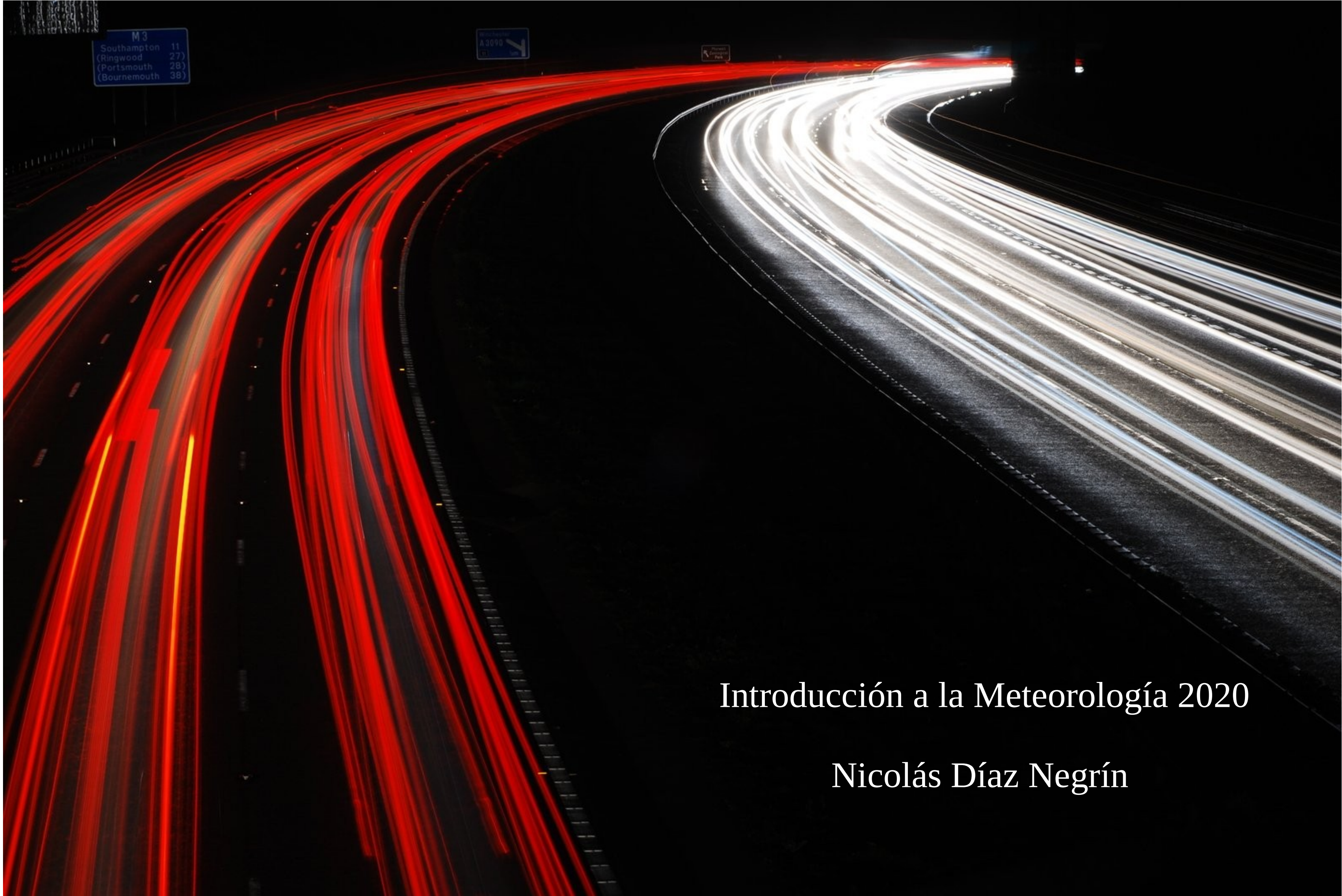
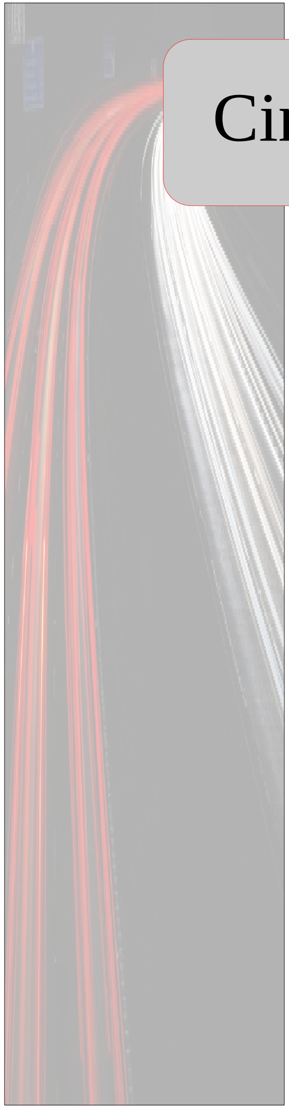
Cinemática



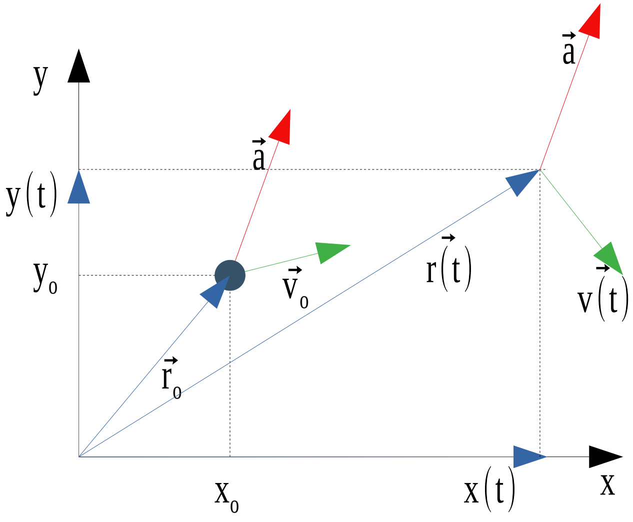
Introducción a la Meteorología 2020

Nicolás Díaz Negrín



Cinemática en 2Dim

Movimiento con aceleración constante en dos dimensiones.



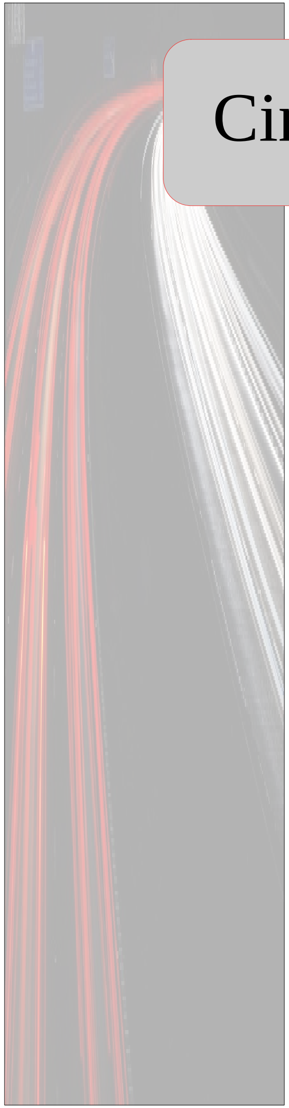
Como la aceleración es constante, cada una de sus componentes lo es. $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$

Podemos describir el movimiento, de cada una de las coordenadas espaciales.

Movimiento en eje x: $\begin{cases} x(t)=x_0+v_{ox}t+\dfrac{a_x t^2}{2} \\ v_x(t)=v_{ox}+a_x t \end{cases}$

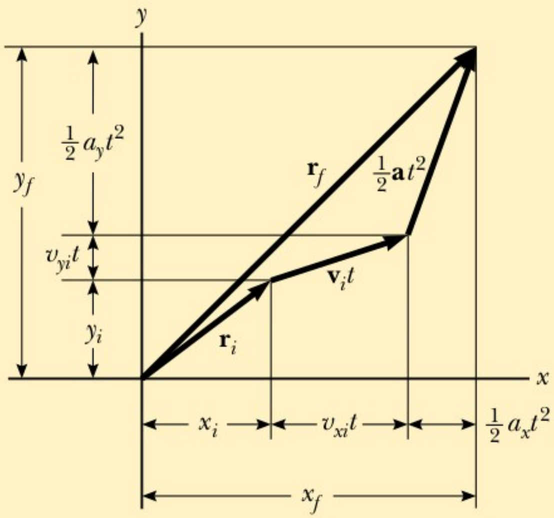
Movimiento en eje y: $\begin{cases} y(t)=y_0+v_{oy}t+\dfrac{a_y t^2}{2} \\ v_y(t)=v_{oy}+a_y t \end{cases}$

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}=\left(x_0+v_{ox}t+\frac{a_x t^2}{2}\right)\hat{i}+\left(y_0+v_{oy}t+\frac{a_y t^2}{2}\right)\hat{j} \longrightarrow \boxed{\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2}} \quad \boxed{\vec{v}(t)=\vec{v}_0++\vec{a}\,t}$$



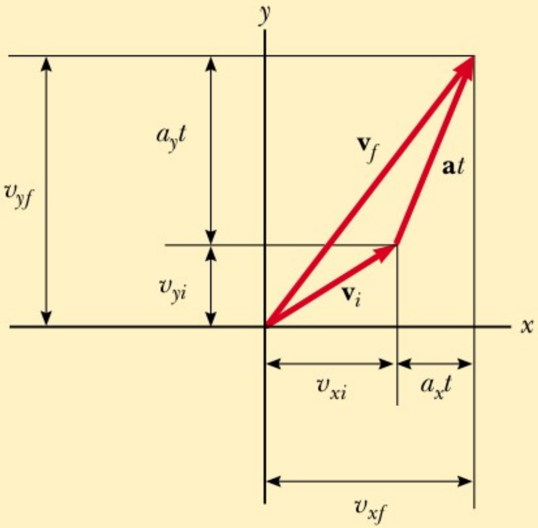
Cinemática en 2Dim

Suma vectorial de términos en $\vec{r}(t)$

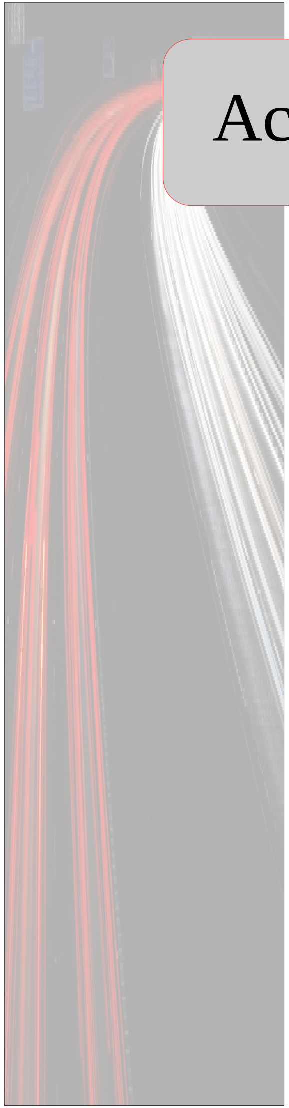


(b)

Suma vectorial de términos en $\vec{v}(t)$



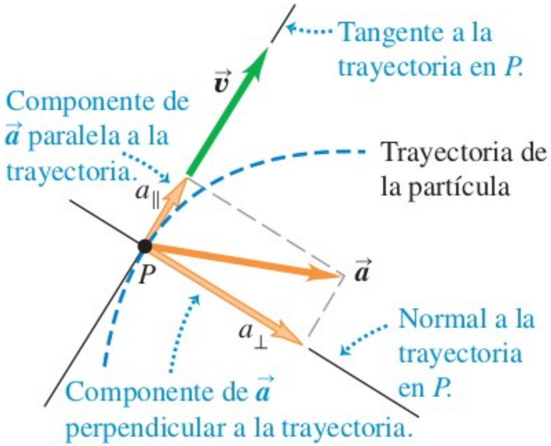
(a)

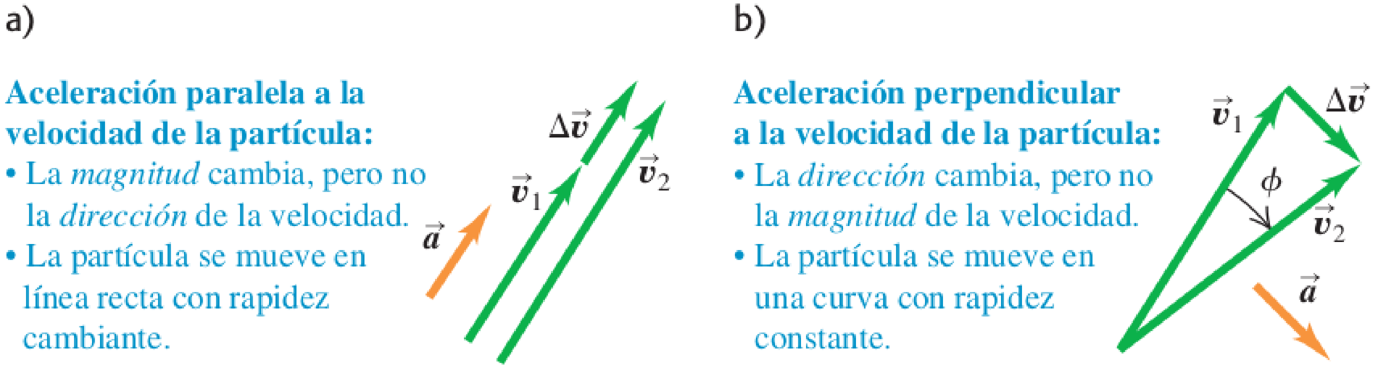


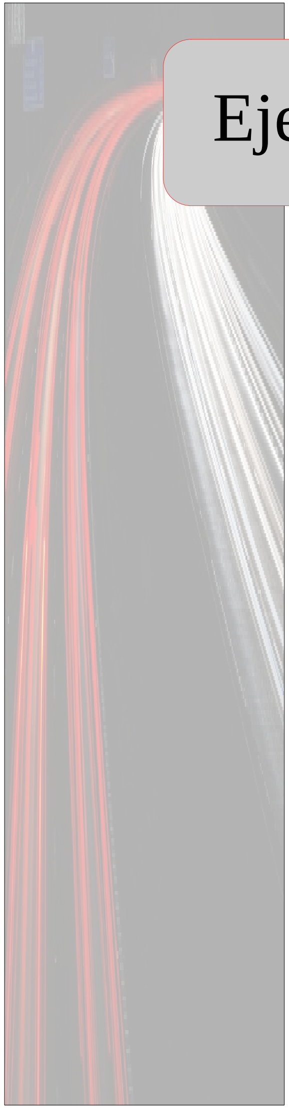
Aceleración tangente y perpendicular

Ya mencionamos que el vector aceleración puede darse por:

1. Un cambio en el módulo del vector velocidad
2. Un cambio en la dirección del vector velocidad
3. Ambos cambios.

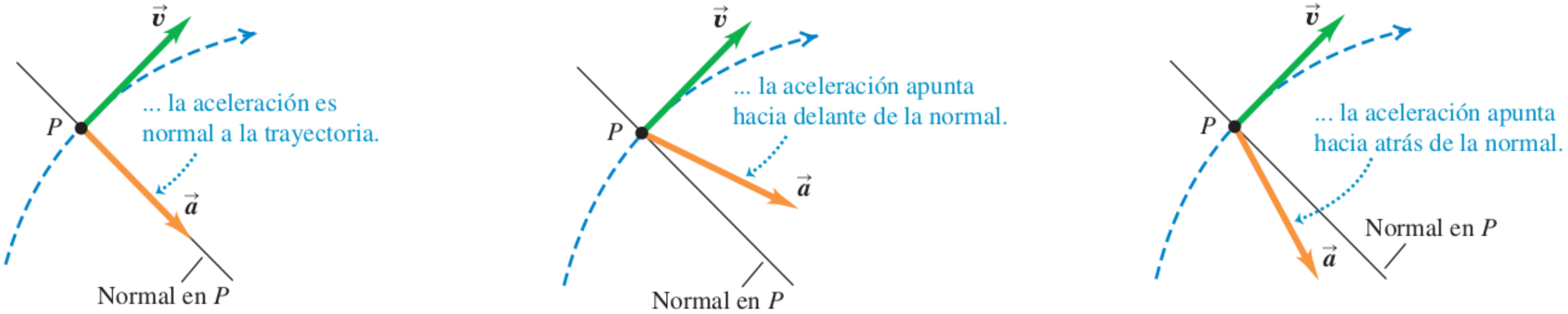


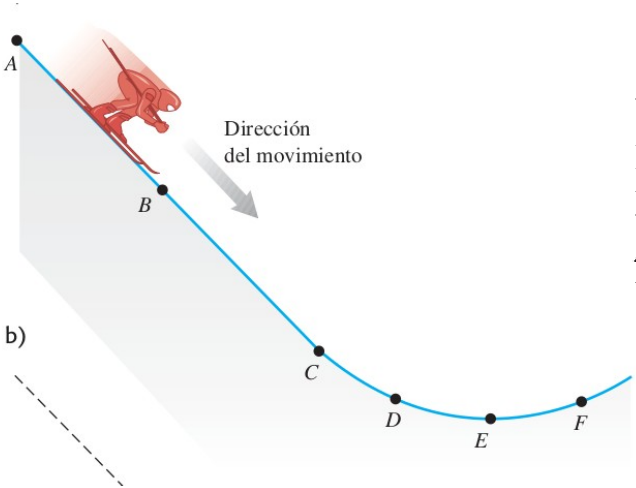




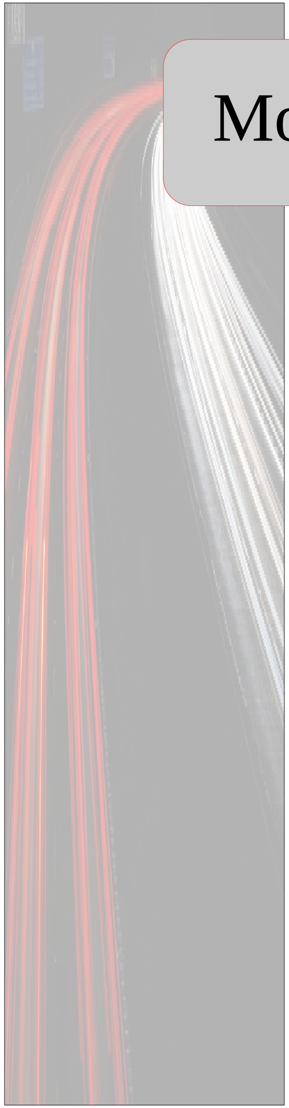
Ejercicio

¿Cómo es (cualitativamente) el vector velocidad un instante más tarde?

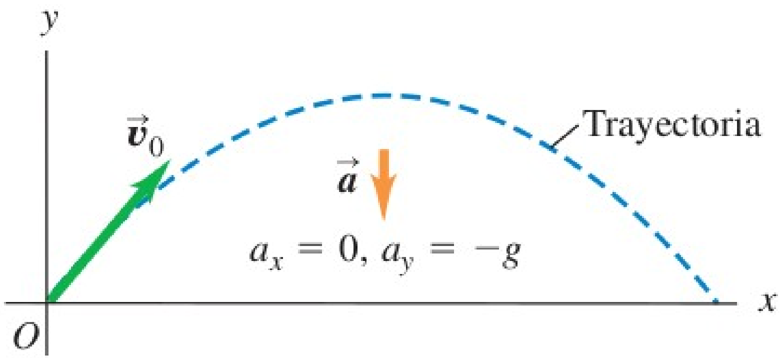




Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto, como se muestra en la figura 3.14a. La rampa es recta entre A y C, y es curva a partir de C. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente abajo de A a E, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector de aceleración en los puntos B, D, E y F.



Movimiento de Proyectil



Movimiento de un cuerpo con velocidad inicial cualquiera, bajo las mismas hipótesis de caída libre.

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = v_{ox}\,\hat{i} + v_{oy}\,\hat{j} \\ \vec{a} = 0\,\hat{i} - g\,\hat{j} \end{cases} \longrightarrow$$

MRU en eje x

MRUA en eje y

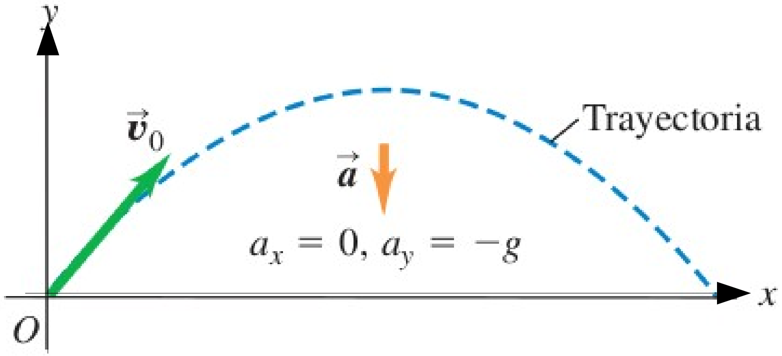
Ecs en eje x: $\begin{cases} x(t) = v_{ox}\,t + x_0 \\ v_x(t) = v_{ox} \\ a_x(t) = 0 \end{cases}$

Ecs en eje y: $\begin{cases} y(t) = \dfrac{-g\,t^2}{2} + v_{oy}\,t + y_0 \\ v_x(t) = -g\,t + v_{oy} \\ a_y(t) = -g \end{cases}$

¡OJO CON LOS SIGNOS! $\longleftrightarrow$ DEPENDE DE LA ELECCIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS

Cinemática en 2Dim

Trayectoria: nos independizamos del tiempo para obtener y(x)



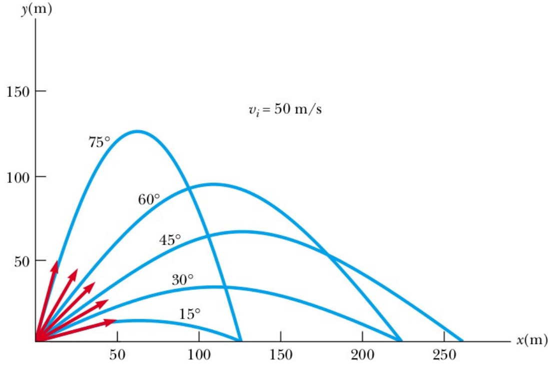
$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = -A x^2 + B v_{ox} x \\ A > 0 \\ B > 0, B = 0, B < 0 \end{array}}$$

¡Ec. de una parábola con concavidad negativa!

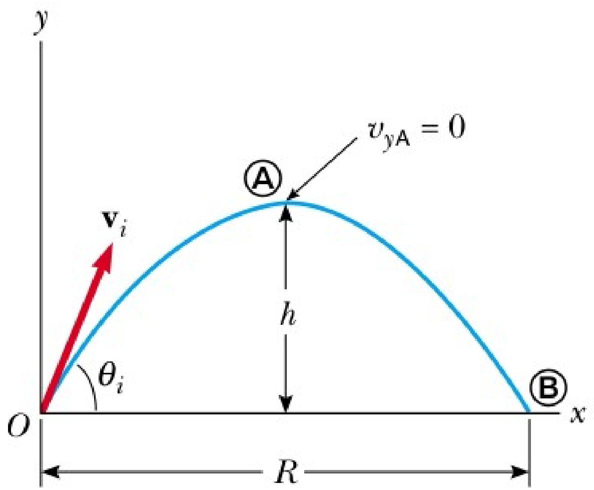
Vamos a elegir el sistema de coordenadas ubicado en la posición inicial

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = v_{ox} t & \longrightarrow \quad t = x / v_{ox} \\ y(t) = -\dfrac{g t^2}{2} + v_{oy} t & \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = -\frac{g x^2}{2 v_{ox}^2} + v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} = -\frac{g}{2 v_{ox}^2} x^2 + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x$$



Altura Máxima y Rango



Condición para altura máxima: $v_y = 0$

$$h = \frac{v_{oy}^{2}}{2g}$$

$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen}(\theta_i)$$

$$\boxed{h = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2(\theta_i)}{2g}}$$

Rango:

Sea t_R el tiempo en el cual la partícula vuelve a pasar por $y=0$

$$y(t_R) = 0 = -\frac{g\,t_R^2}{2} + v_{oy}\,t_R \longrightarrow t_R\left(-\frac{g\,t_R}{2} + v_{oy}\right) = 0$$

$$t_R = 0 \qquad \boxed{t_R = \frac{2\,v_{oy}}{g}}$$

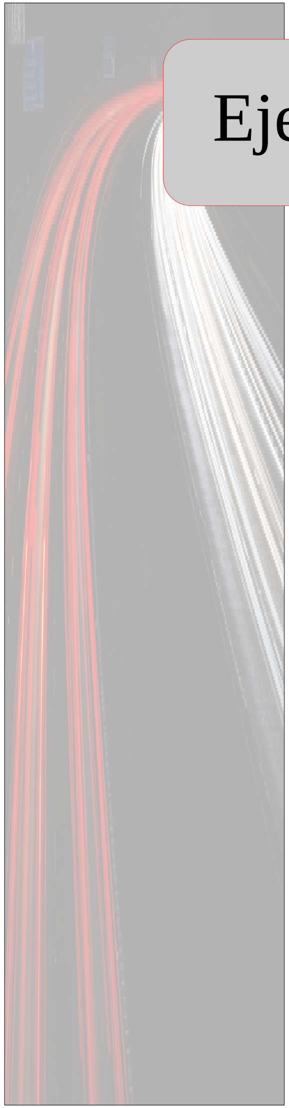
Sustituimos t_R en $x(t)$

$$R = x(t_r) = \frac{2\,v_{ox}\,v_{oy}}{g} = \frac{2\,v_o^2}{g}\operatorname{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i)$$

$$2\operatorname{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i) = \operatorname{sen}(2\,\theta_i)$$

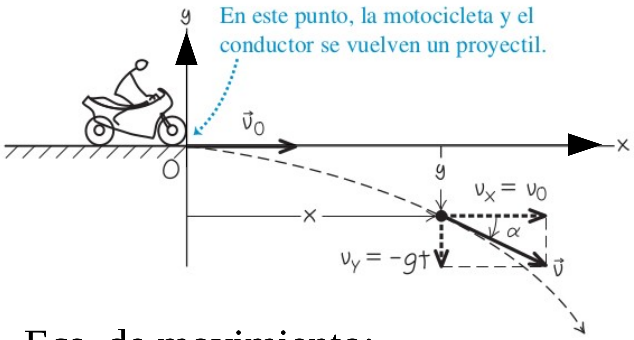
$$\boxed{R = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}(2\,\theta_i)}{g}}$$

El alcance máximo se da para $\theta_i = 45°$



Ejemplo 1

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.



Ecs. de movimiento:

Eje x: $x(t) = v_{0x}t + \cancel{x_0}$

Eje y: $y(t) = -\frac{g t^2}{2} + \cancel{v_{0y}}t + \cancel{y_0}$

$v_y(t) = -gt + \cancel{v_{0y}}$

a. Posición 0.5s más tarde

$$x(t=0.5\,s) = 9.0\,m/s\;0.5\,s = 4.5\,m$$

$$y(t=0.5\,s) = -\frac{9.8\,m/s^2(0.5\,s)^2}{2} = -1.2\,m$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = 4.5\,m\,\hat{i} - 1.2\,m\,\hat{j}}$$

b. Velocidad 0.5s más tarde

$$v_x(t) = v_o = 9.0\,m/s$$

$$v_y(t=0.5\,s) = -9.8\,m/2^2\,0.5\,s = -4.9\,m/s$$

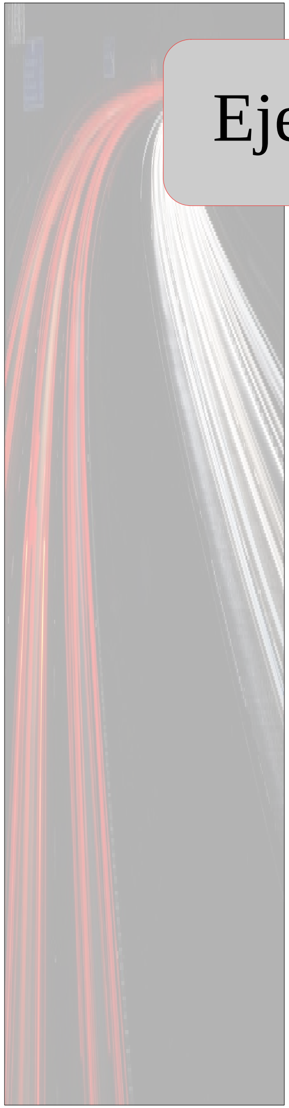
$$\boxed{\vec{v}(t) = 9.0\,m/s\,\hat{i} - 4.9\,m/s\,\hat{j}}$$

c. Distancia desde el origen en 0.5s

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\boxed{r = 4.7\,m}$$



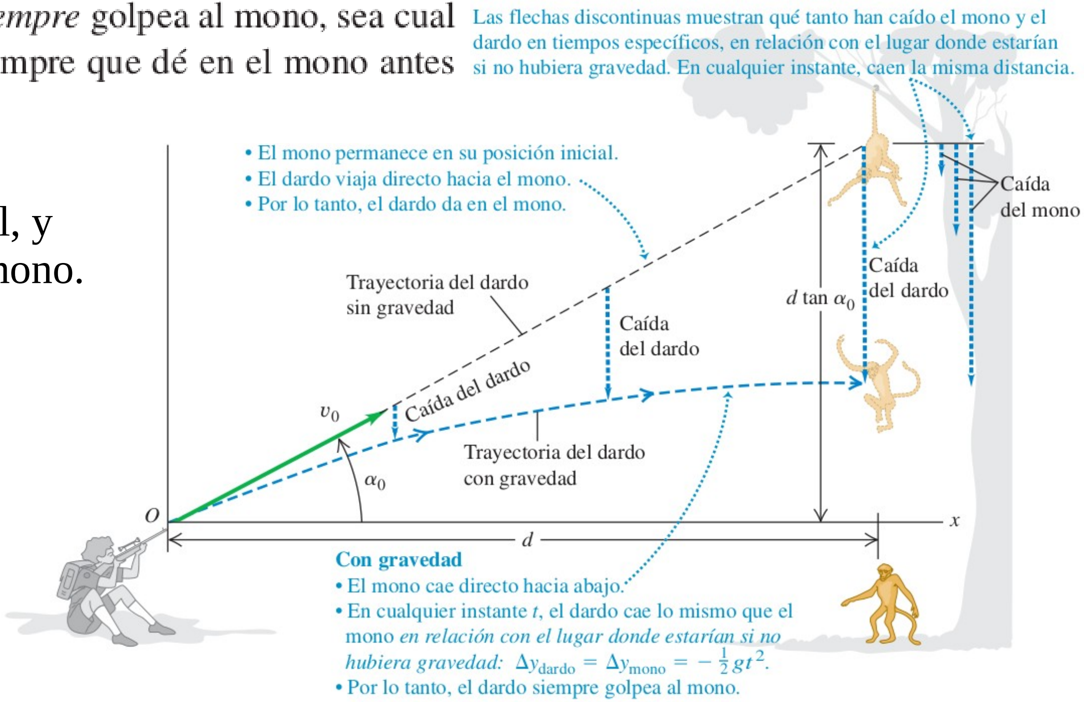
Ejemplo 2

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 3.26). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

Conocemos la distancia horizontal, y el ángulo al cuál está ubicado el mono.

Calcular el tiempo que demora el proyectil en recorrer d.

En ese tiempo, encontrar posición vertical del mono, y del proyectil.



Cinemática en 2Dim

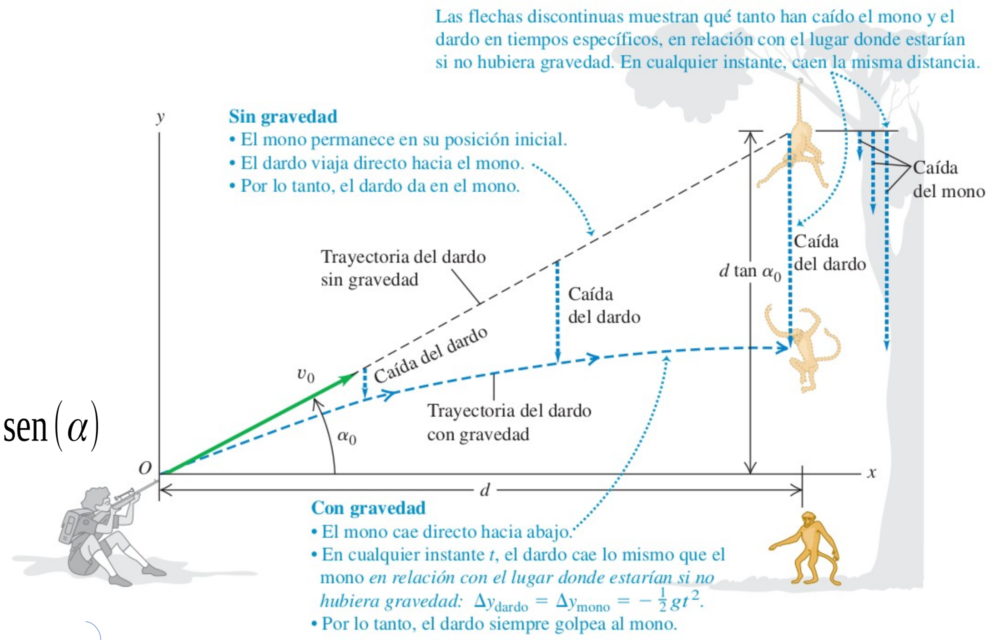
Ecs. de movimiento:

Mono: $y_m(t) = -\frac{g t^2}{2} + \cancel{v_{m,oy}} t + y_{m,0}$

Proyectil: $y_p(t) = -\frac{g t^2}{2} + v_{p,oy} t + \cancel{y_{p,o}}$

$x_p(t) = v_{p,ox} t + \cancel{x_{p,o}}$

$y_{m,0} = d \tan(\alpha) \qquad v_{p,ox} = v_{p,0}\cos(\alpha) \qquad v_{p,oy} = v_{p,0}\,\mathrm{sen}(\alpha)$

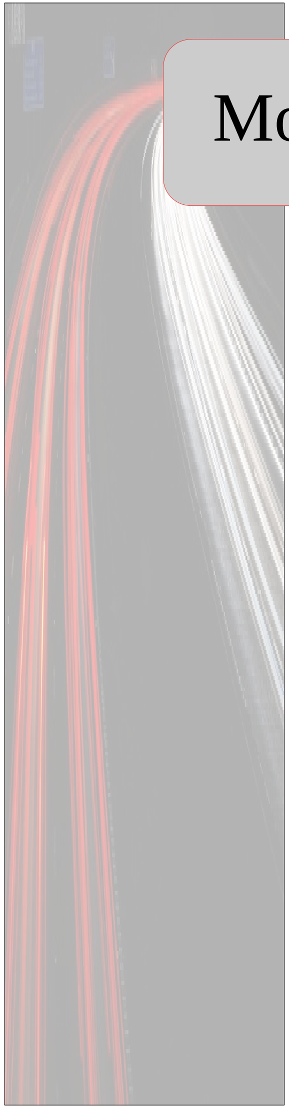


¿Cuánto tiempo le lleva al proyectil, recorrer la distancia d?

$$t_d = \frac{d}{v_{p,0}\cos(\alpha)}$$

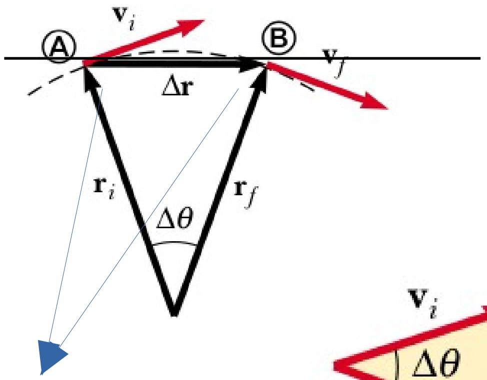
$$y_m(t_d) = -\frac{g t_d^2}{2} + d\tan(\alpha) \qquad y_p(t_d) = -\frac{g t_d^2}{2} + v_{p,0}\,\mathrm{sen}(\alpha)\, t_d$$

$$y_p(t) = -\frac{g t_d^2}{2} + \frac{v_{p,0}\,\mathrm{sen}(\alpha)\, d}{v_{p,0}\cos(\alpha)} = -\frac{g t_d^2}{2} + d\tan(\alpha)$$



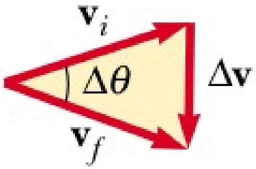
Movimiento Circular Uniforme

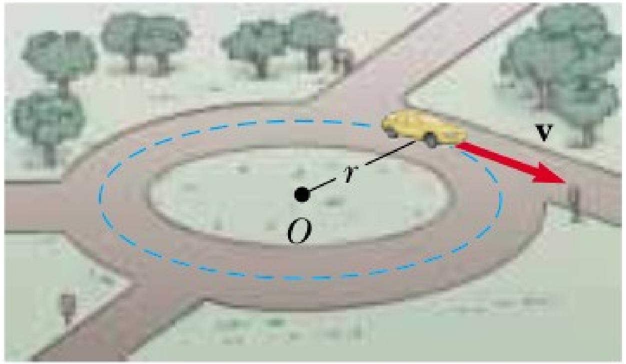
Movimiento de una partícula en un trayectoria circular con rapidez constante.



$$\alpha=\frac{180-\Delta\theta}{2}$$

$$\alpha=90-\frac{\Delta\theta}{2}$$



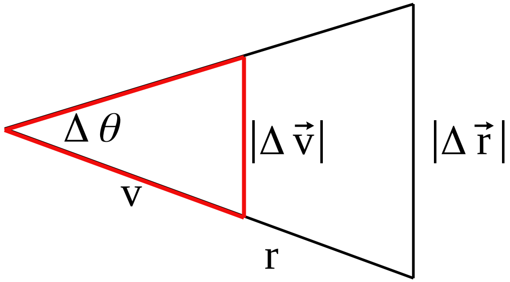


Observación: la aceleración es según la dirección radial: ¡aceleración centrípeta!

Aceleración Media: $|\vec{a}_M|=\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$

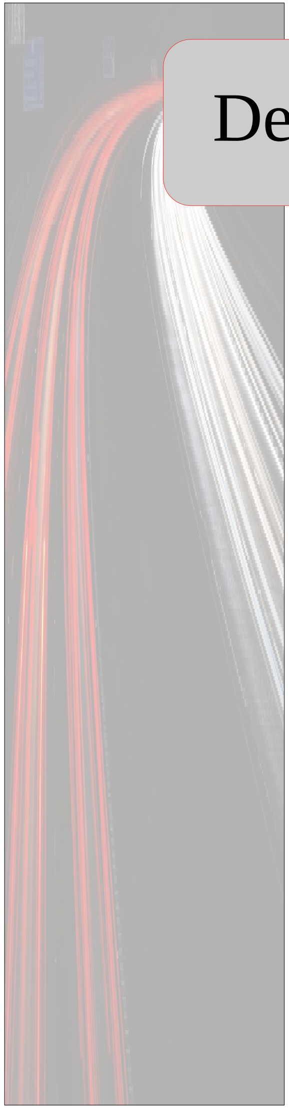
Los triángulos son semejantes

$$\frac{|\Delta\vec{r}|}{r}=\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}$$

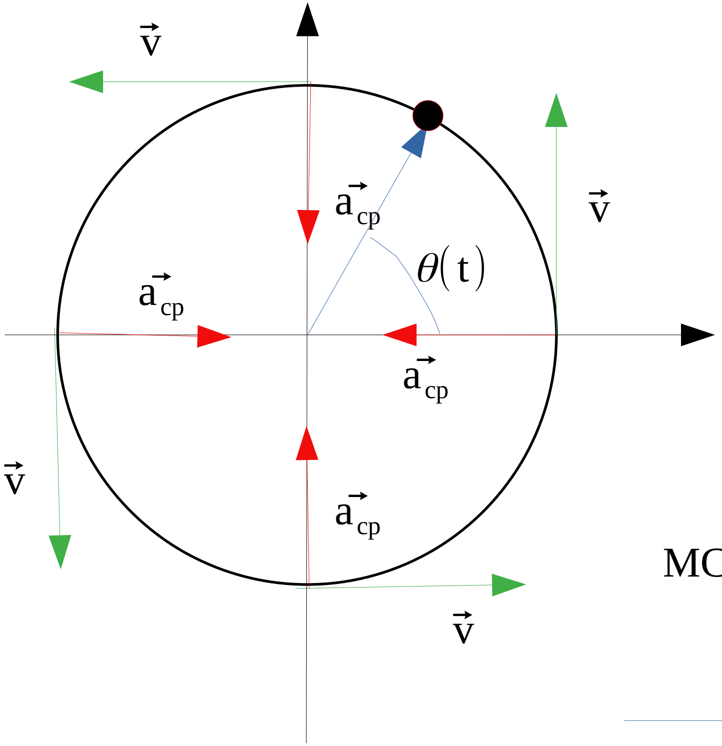


$$|\vec{a}_M|=\frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\rightarrow}$$

$$\boxed{|\vec{a}|=\frac{v^2}{r}}$$



Descripción del MCU



Período de Rotación: $T = \dfrac{2\pi r}{v}$

Cantidades Angulares:

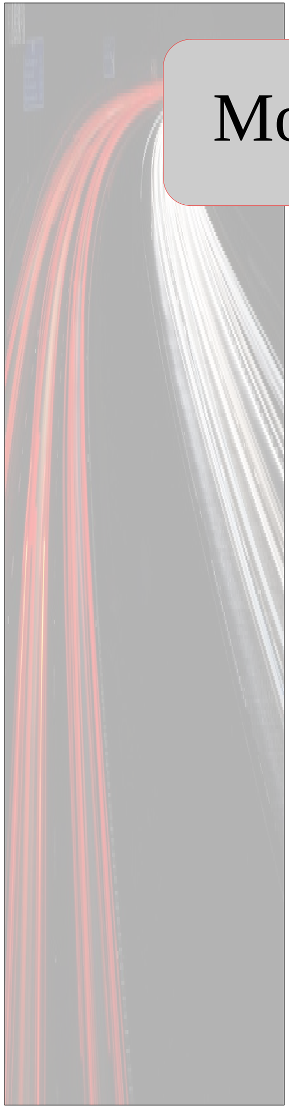
1. Posición angular: $\theta(t)$ cantidad escalar
2. Velocidad angular: $\omega(t)$ cantidad vectorial
3. Aceleración angular: $\alpha(t)$ cantidad vectorial

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

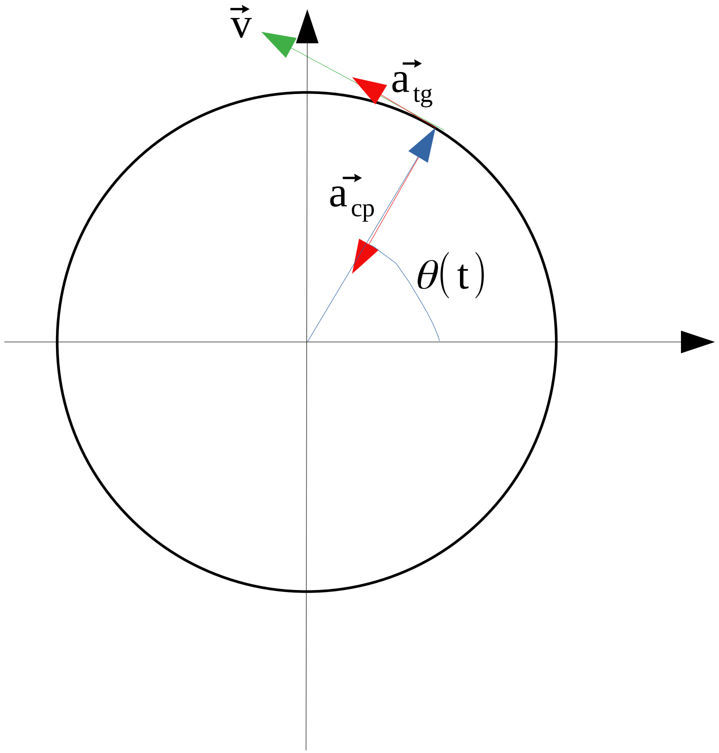
MCU: $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \longrightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$\longrightarrow \boxed{\omega = \dfrac{v}{r}}$

Ecs. de Movimiento: $\boxed{\begin{aligned} \omega(t) &= \omega \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t \end{aligned}}$

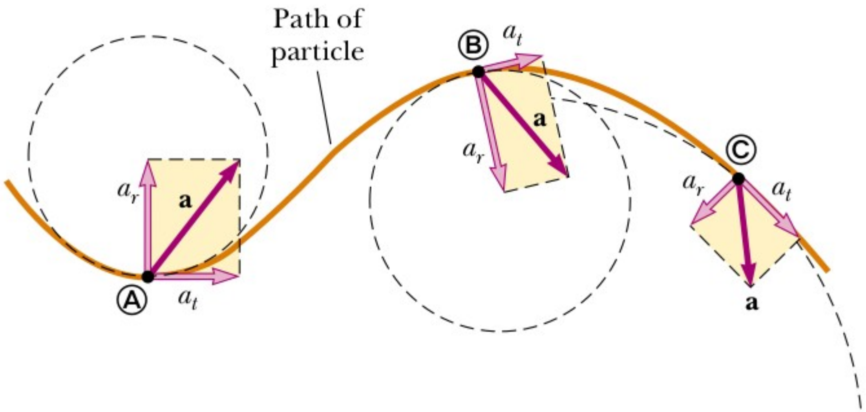


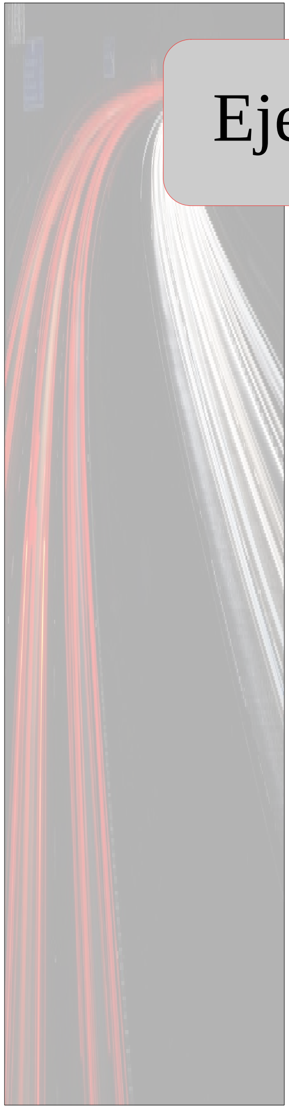
Movimiento Circular no Uniforme



$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}_{cp}| = \dfrac{v^2}{r} \longrightarrow \text{Asociada a cambio en la dirección} \\[2ex] |\vec{a}_{tg}| = \dfrac{d\,v}{dt} \longrightarrow \text{Asociada a cambio en el módulo} \end{array} \right.$$

Aplicable localmente a curvas suaves





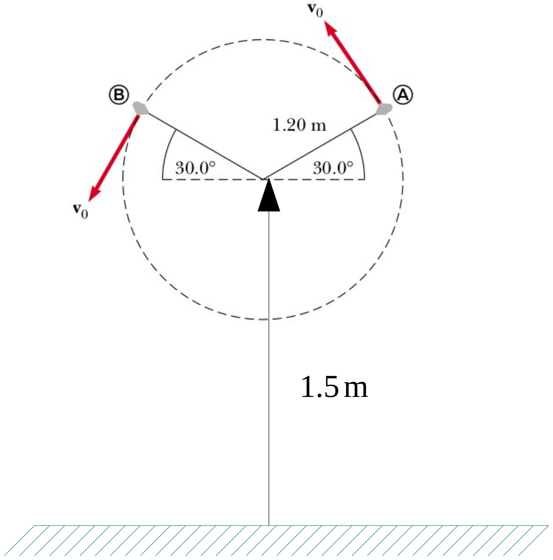
Ejemplo: Mov. Compuesto

Se gira una piedra en una trayectoria circular en un plano vertical, como se muestra en la figura. La rapidez de la piedra es constante, igual a 15.0m/s, y el centro del círculo se encuentra a 1.5m del suelo.

(a) Calcule el período de rotación, y la velocidad angular.

(b) Calcule el rango si la piedra es soltada en los puntos A o B.

(c) ¿Cuál es la aceleración de la piedra justo antes de soltarla en el punto A, y justo después de soltarla?



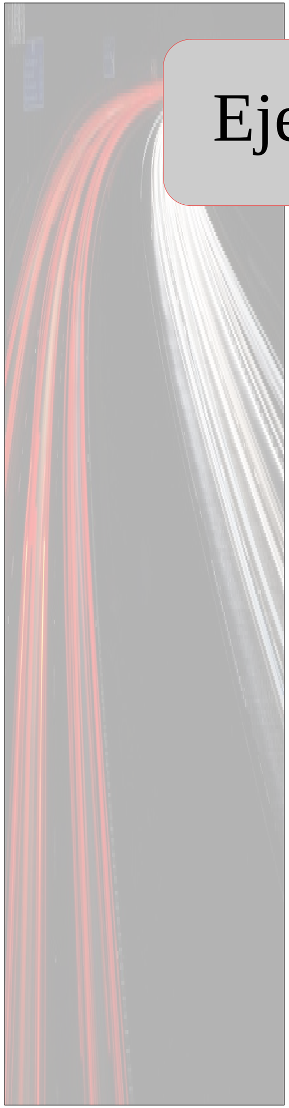
(a) Período de rotación

$$T=\frac{2\pi r}{v_0}=\frac{2\pi 1.20\,m}{15.0\,m/s}\approx 0.5\,s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\approx 12.5\,rad/s$$

(b) Rango = máxima distancia horizontal recorrida

Velocidad inicial del proyectil = última velocidad del mov. circular



Ejemplo: Mov. Compuesto

Ecuaciones del proyectil: $\begin{cases} x(t)=v_{0x}t+\cancel{x_0} \\ y(t)=-\dfrac{g t^2}{2}+v_{0y}t+y_0 \end{cases}$

Buscamos t_R tal que $y(t_R)=0$

$$y(t)=-\frac{g t^2}{2}+v_{0y}t+y_0 \longrightarrow 0=-\frac{g t_R^2}{2}+v_{0y}t_R+y_0$$

$$t_R=\frac{-v_{0y}\pm\sqrt{v_{0y}^2+2gy_0}}{-g} \longrightarrow \boxed{t_R=\frac{v_{0y}+\sqrt{v_{0y}^2+2gy_0}}{g}}$$

Sustituimos t_R en $x(t)$:

$$R=v_{0x}t_R=v_{0x}\left(\frac{v_{0y}}{g}+\frac{v_{0y}}{g}\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_{0y}^2}}\right)$$

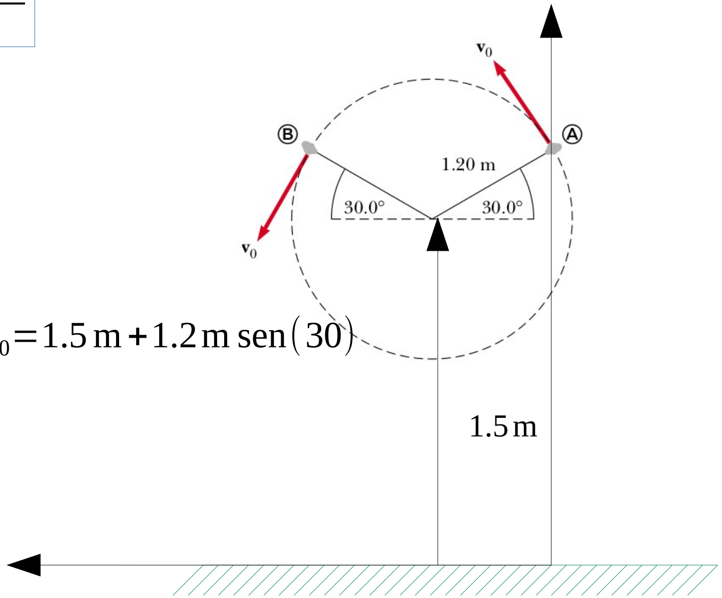
$$R=\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_{0y}^2}}\right)$$

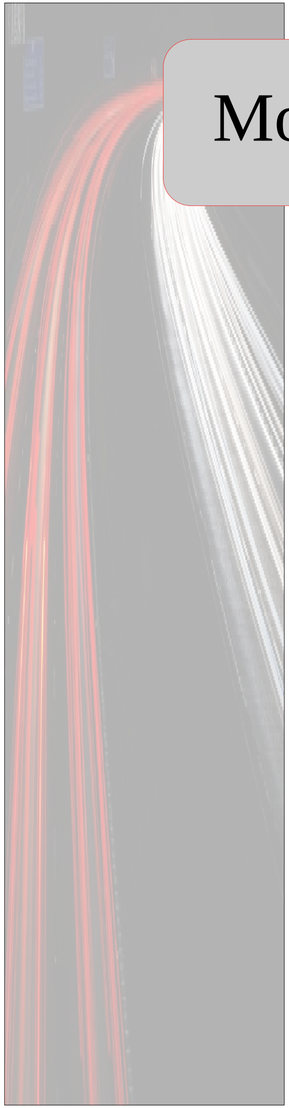
$v_{0x}=\mathrm{sen}(30)\,15.0\,m/s$ $\quad$ $y_0=1.5\,m+1.2\,m\,\mathrm{sen}(30)$

$v_{0y}=\cos(30)\,15.0\,m/s$

(c) La aceleración antes de soltarla es la del MCU: $a_{cp}=\dfrac{v_0^2}{r}$

Después de soltarla es: $\vec{g}$

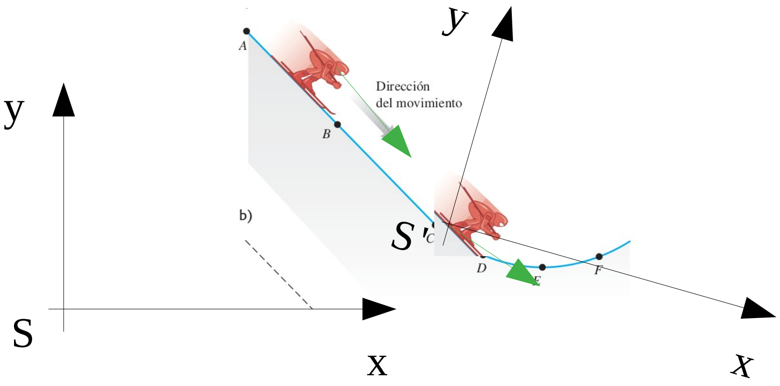


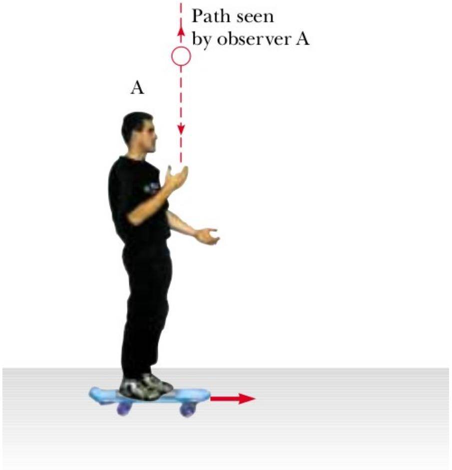


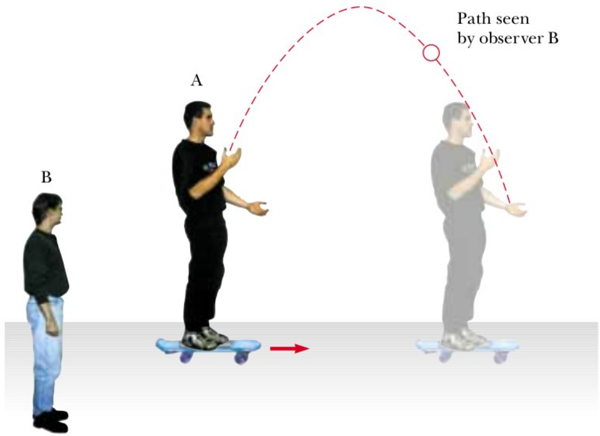
Movimiento Relativo

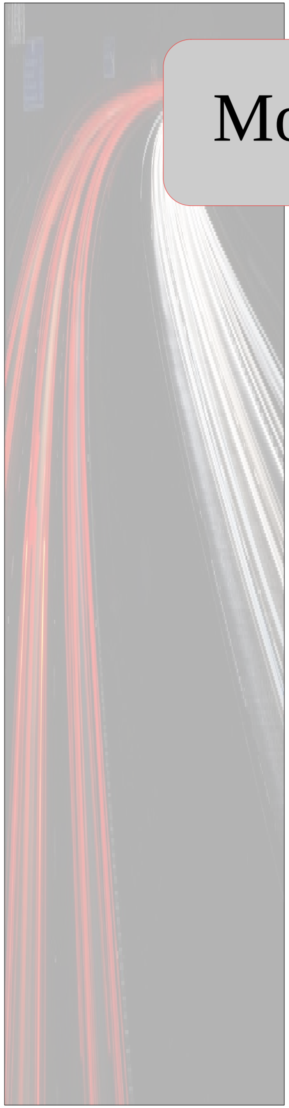
Hasta ahora hemos supuesto que el sistema de referencia está en reposo, y desde él observamos el movimiento del sistema físico.

¿Cómo compatibilizamos las medidas tomas por los sistemas S y S’?

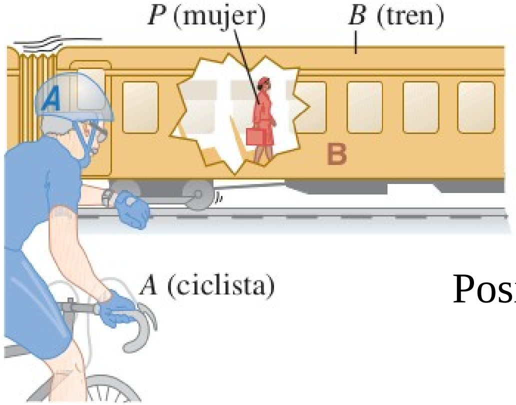








Movimiento Relativo 1Dim



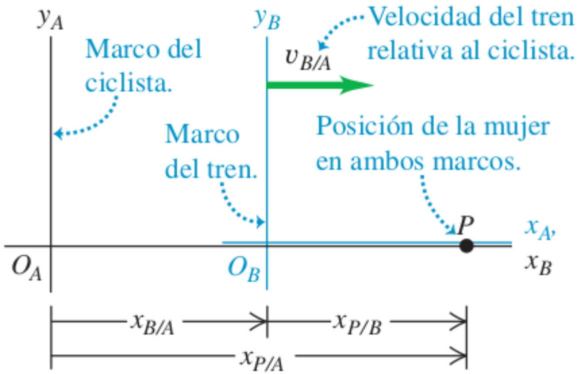
Relación entre sistemas de la posición de la pasajera :

$$x_{p/A} = x_{B/A} + x_{p/B}$$

Posición de la pasajera respecto a A

Posición de B respecto a A

Posición de la pasajera respecto a B



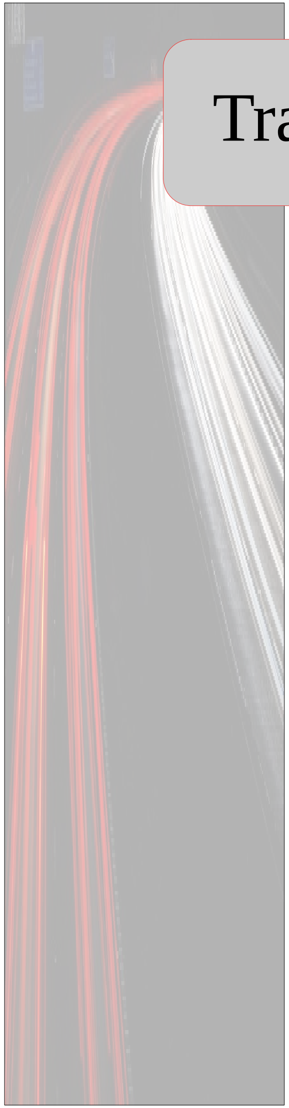
Relación entre velocidades :

$$v_{p/A} = v_{B/A} + v_{p/B}$$

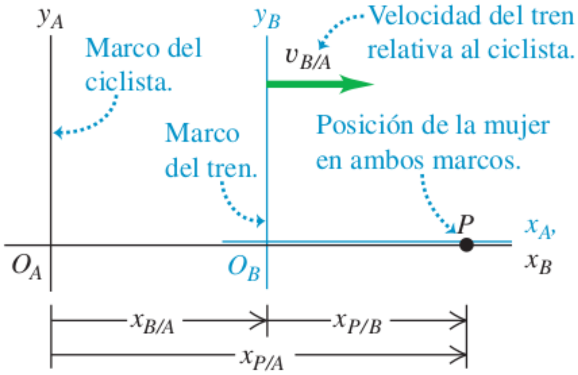
Relación entre aceleraciones :

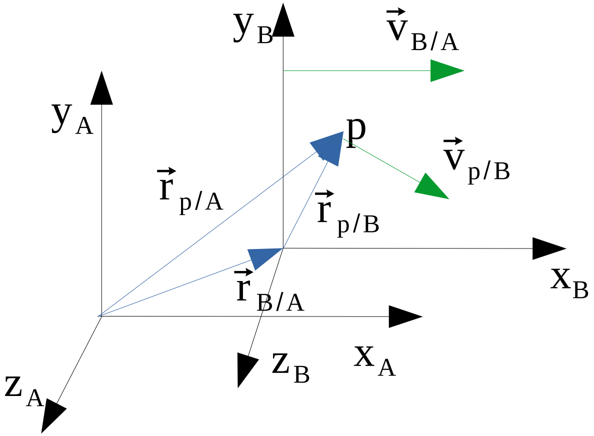
$$a_{p/A} = a_{B/A} + a_{p/B}$$

Sistemas Inerciales :
Conjunto de sistemas que se mueven a velocidad constante



Transformaciones de Galileo





Dimensión 1:

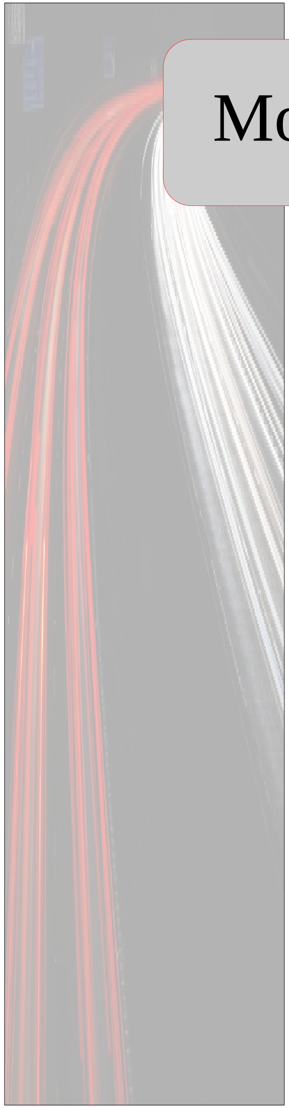
$$\left.\begin{aligned} x_{p/A} &= x_{B/A} + x_{p/B} \\ x_{B/A} &= v_{B/A}\, t \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{x_{p/A} = v_{B/A}\, t + x_{p/B}}$$

Dimensión 2 o 3:

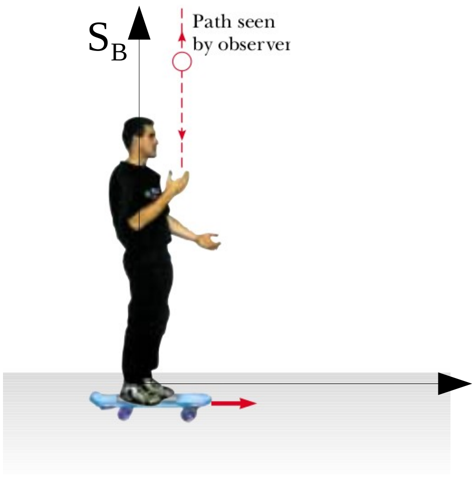
Si la velocidad a la cual se mueve B respecto a A tiene componentes en las 3 direcciones espaciales:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{p/A} &= \vec{v}_{B/A}\, t + \vec{r}_{p/B} \\ \vec{v}_{p/A} &= \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{p/B} \\ \vec{a}_{p/A} &= \vec{a}_{p/B} \end{aligned}}$$

Como estas ecuaciones son vectoriales, pueden ser descompuestas en las direcciones (x,y,z)



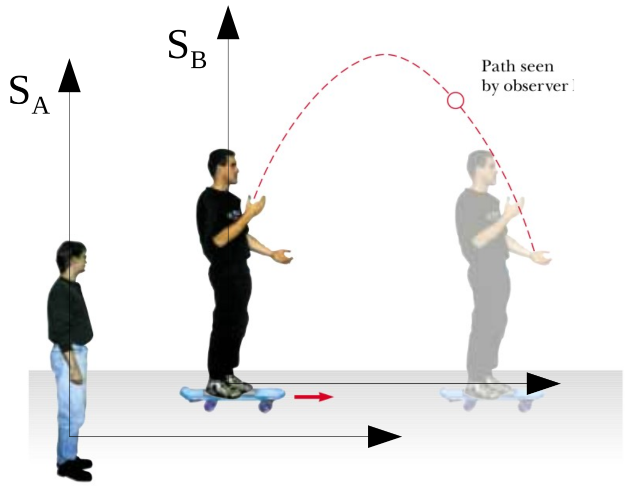
Movimiento Relativo: ejemplo 1



¿Qué ve S_B?

$\vec{v}_{o,p/B} = v_{o,p/B}\,\hat{j}$ → Caida Libre

$$y_{p/B} = -\frac{g\,t^2}{2} + v_{o,p/B}\,t + y_{o,p/B}$$



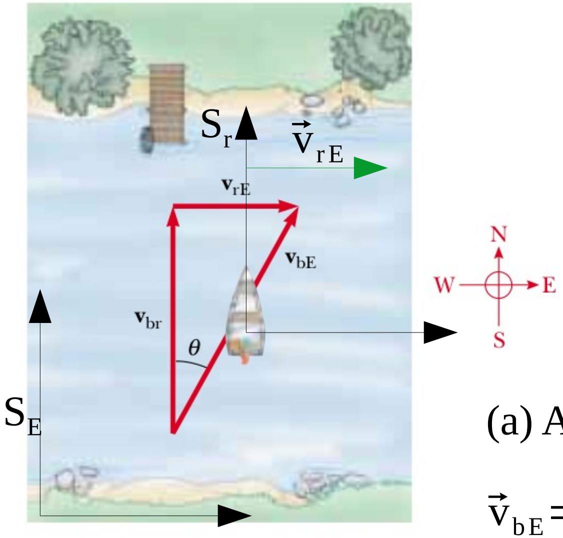
¿Qué ve S_A?

$\vec{v}_{o,p/B} = v_{B/A}\,\hat{i} + v_{o,p/B}\,\hat{j}$ → Mov. de Proyectil

$$y_{p/A} = -\frac{g\,t^2}{2} + v_{o,p/B}\,t + y_{o,p/B}$$

$$x_{p/A} = v_{B/A}\,t + x_{p/A}$$

Movimiento Relativo: ejemplo 2



Un bote parte con velocidad $v_{br}=10.0\,km/h$ hacia el Norte medida respecto al río, el cual se mueve a $v_{rE}=5.0\,km/h$ respecto a la orilla.

(a) Determine la velocidad del bote respecto a la orilla.
(b) Si el bote parte frente al muelle, ¿a qué distancia (d_x) del mismo terminará?. Suponga que el río tiene ancho $d_y=0.100\,km$.

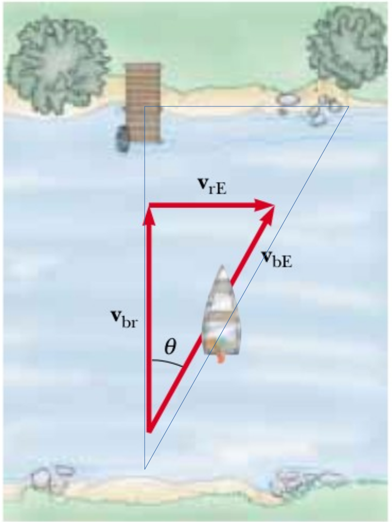
(a) Aplico Transformaciones de Galileo:

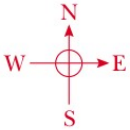
$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_{bE}&=\vec{v}_{br}+\vec{v}_{rE}\\ \vec{v}_{br}&=10.0\,km/h\,\hat{j}\\ \vec{v}_{rE}&=5.0\,km/h\,\hat{i}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \vec{v}_{bE}=5.0\,km/h\,\hat{i}+10.0\,km/h\,\hat{j}$$

$$|\vec{v}_{bE}|=\sqrt{25.0\,km^2/h^2+100.0\,km^2/h^2}\approx 11.2\,km/h$$

$$\tan(\theta)=\frac{v_{rE}}{v_{br}} \longrightarrow \theta=\arctan\left(\frac{5.0\,km/h}{10.0\,km/h}\right)\approx 26.6°$$

Movimiento Relativo: ejemplo 2

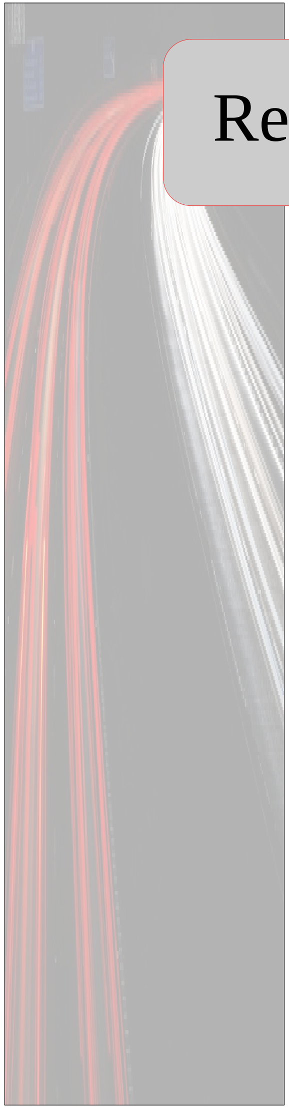




(b) En cada dirección, el bote realiza un MRU

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = v_{rE}\, t \\ y(t) = v_{br}\, t \longrightarrow t = \dfrac{d_y}{v_{br}} \end{array}\right\} \longrightarrow d_x = \frac{v_{rE}\, d_y}{v_{br}} = \mathrm{tg}(\theta)\, d_y$$

(c) ¿Cuál debería ser la velocidad del barco respecto al río, para que visto desde la tierra se dirija derecho al muelle?



Referencias

[1] Física para Ciencias e Ingeniería, Serway. Cap.4 seciones 4-6

[2] Física Universitaria, Sears Zemansky. Cap.3 secciones 4-5