RELATIVIDAD GENERAL 2021 Clase 2

Como punto de partida para construir una nueva teoria de gravedad que respeta el principio de relatividad Einstein conjectura que vale un principio de equivalencia mas fuerte que el que vale como consecuencia de la ley de gravedad de Newton:

Hartle 6.2

Principio de Equivalencia de Einstein (enunciado moderno)

El resultado de cualquier experimento local no gravitatorio realizado en un tiempo suficientemente corto en un laboratorio suficientemente pequeño en caida libre y sin rotación son iguales a como serían si el laboratorio estuviera fijo en un referencial inercial en ausencia de gravedad.

- experimentos locales son los que no implican comunicación con el exterior del laboratorio por medio de señales materiales (como observaciones astronomicos opticos.)

- cuando el laboratorio no es suficientemente pequeño, o el experimento demora demasiado tiempo, entonces efectos como las mareas en la Tierra delatan la presencia de un campo gravitatorio.

- El hecho que todos cuerpos libres (de fuerzas no gravitacionales), en el punto P del espacio tiempo, tienen la misma aceleracion $\vec{g}(P)$ solo implica que el principio de equivalencia aplica a experimentos con cuerpos libres. El principio de equivalencia de Einstein aplica a cualquier experimento local con materia.

- Si se incluye tambien experimentos gravitatorios, p.ej. se mide movimiento del sistema Tierra-Luna cayendo en campo del Sol, se llama "principio de equivalencia fuerte" que tambien parece estar cierto.

- El principio de equivalencia de Einstein incluye una versión local del principio de relatividad. Las leyes que obedecen los experimentos locales deben ser especial relativistas. En cada punto se puede imaginar laboratorios en caída libre con cualquier velocidad. Los resultados de experimentos, incluido mediciones de la velocidad de la luz, en todos estos laboratorios deben ser iguales.

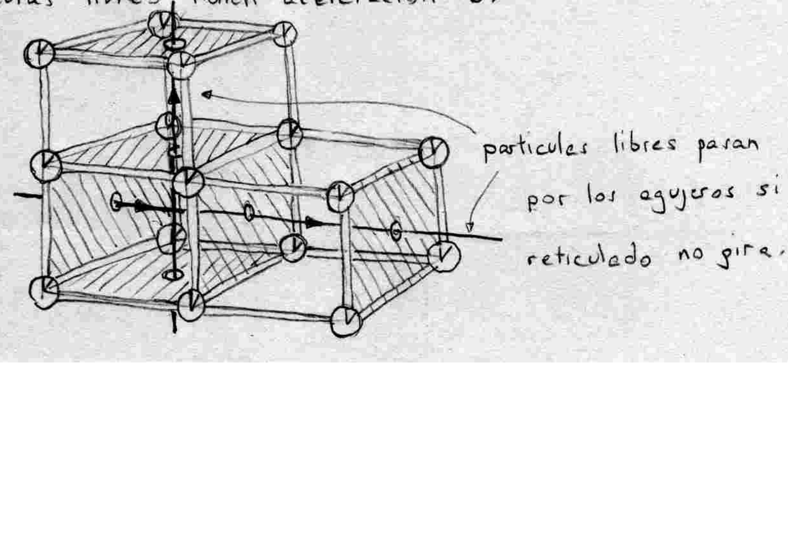
- El principio de equivalencia no esta definido con total precision. Para poder hacer esto habría que restringir bastante el universo de teorías fisicas que consideramos para tener una estructura matemática en que agarrarse. Sin embargo es muy útil como principio heurístico.

Hartle 3.1

=> Los referenciales en caída libre sin rotacion se pueden tomar como los referenciales inerciales (validos solo localmente)

- en general un "referencial" es solo un sistema de coordenadas en el espacio tiempo. Pero aquí pedimos más: que sean coordenados que podrían ser marcados por un reticulado rígido de reglas ortogonales, con relojes identicos sincronizados en los vertices. Entonces las coordenadas espaciales x, y, z son Cartesianas en cada 3-superficie de tiempo t = constante.

- ademas este reticulado cae libremente y no gira. Entonces, por el principio de equivalencia vale la primera ley de Newton - particulas libres tienen aceleracion 0.



- por el principio de equivalencia experimentos en el referencial en caida libre deben parecer iguales en coordenados t, x, y, z como los mismos experimentos en un referencial inercial en ausencia de gravedad en coordenades t, x, y, z definidos de la misma manera allí. = en otros palabras en coordenadas Lorentzianas ← coordenades tipo cartesianas en el espacio tiempo de relatividad especial.

- La definición de Einstein de referenciales inerciales locales es mas natural que la definición de referencial inercial en la teoria de Newton. Se podría decir incluso que corrige un defecto estetico de la teoría de Newton. — Y en la física teórica un defecto estetico suele indicar un defecto de sustancia.
  Las referenciales inerciales locales de Einstein estan determinadas por el movimiento de partículas libres. Refs inerciales tambien tienen un rol en la teoría de Newton — la ley de gravedad de Newton da la aceleracion $\vec{g}$ de partículas en un referencial inercial — pero son otros que los de Einstein,
  - no se pueden determinar a partir de experimentos locales con partículas libres.
  - tampoco con otros experimentos locales si vale el principio de equivalencia de Einstein.

    porque no se puede, a partir de tales experimentos, distinguir entre la fuerza de gravedad y las fuerzas inerciales propios de referenciales no inerciales.

⇒ Con la definicion de Einstein de referenciales inerciales locales la fuerza gravitatoria en referenciales <u>no</u> en caida libre — como uno en reposo en la superficie de la Tierra — son fuerzas inerciales (a veces llamados "ficticias").

En otras palabras: Fuerzas gravitacionales son fuerzas inerciales.

Ejemplo: La fuerza centrifugal, y la de Coriolis en un referencial en rotacion son fuerzas gravitacionales en este referencial. Galileo y la Inquisición se podrian haberse puestos de acuerdo diciendo que la Tierra esta en reposo, con el Sol, los planetas, y las estrellas girando entorno a Ella, impulsados por un campo gravitatorio algo complicado!

En frase de Einstein "La fuerza gravitacional tiene una existencia relativa."

- Einstein consideraba esto una generalizacion del Principio de Relatividad desde solo referenciales inerciales a todos referenciales: Las leyes de física son incambiados no solo cuando se cambia de un ref. inercial a otro, pero tambien cuando se cambia a un referencial no inercial, siempre y cuando se transforma correctamente el campo gravitatorio.

- Es por eso que Einstein insistió que una teoría de gravedad debe satisfacer el principio de equivalencia. Las violaciones de equivalencia que surgen en teorías especial relativistas de gravedad suelen ser muy pequeñas (Einstein no sabía de las pruebas muy precisas de $m_{grav} = m_{inercia}$ de Eotvos hasta 1913), así no eran un motivo contundente de rechazar estas teorías. En ausencia de gravedad hay referenciales (coordenadas) claramente preferidos – las referenciales inerciales globales. En presencia de gravedad, si vale el principio de equivalencia de Einstein, y se adopta su definicion de referencial inercial local, cualquier sistema de coordenadas es inercial solo en puntos aislados. Entonces se debe tratarlos en pie de igualdad, generalizando el Principio de Relatividad. Por eso la teoría de gravedad con que finalmente salió se llama "Relatividad General".

- Seguramente se puede decir a favor del principio de equivalencia de Einstein que parece ser cierto y que es un buen candidato a ser "la esencia" del fenomenon gravitatorio.

- Según el concepto de Einstein el campo gravitatorio <u>es</u> el conjunto de referenciales inerciales locales en cada punto.

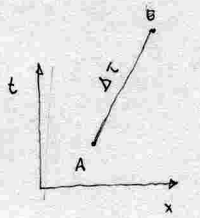
→ ¿Como se formula entonces una teoría de gravedad de este tipo?

Veremos pronto que especificar a los referenciales inerciales locales es equivalente a dar la métrica en cada punto espacio temporal.

- Recuerden que en relatividad especial hay una noción de distancia invariante entre dos puntos en espacio tiempo: el tiempo própio $\Delta\tau$ determinado por

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad \longleftarrow \left(\begin{array}{c} \Delta x^2 = (\Delta x)^2 \\ \text{no el incremento} \\ \text{de } x^2 \end{array} \right)$$

en coordenadas Lorentzianas.



Aqui he puesto $c=1$. Cuando $\Delta\tau^2 > 0$ $\Delta\tau$ es el incremento del tiempo marcado por un reloj al viajar desde el primer punto (A) hasta el segundo punto (B) con velocidad constante (menor que $c=1$).

⇒ Dado un referencial inercial local en el entorno de un punto podemos se puede calcular diferencial de tiempo propio entre este y un punto vecino:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

con t, x, y, z las coordenadas Lorentzianas locales que seran definidos por un reticulado en caida libre.

- Si x^μ $\mu = 0,1,2,3$ es un sistema de coordenadas cualquiera cubriendo el mismo entorno entonces se pueden escribir dt, dx, dy, dz como combinaciones lineales de dx^0, dx^1, dx^2, dx^3:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial t}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial t}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial t}{\partial x^3} dx^3$$

etc.

Entonces $$d\tau^2 = -\sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad (1)$$ vease Hartle Cap. 2

- $g_{\mu\nu}$ son los componentes de una matriz simétrica 4×4. (El signo "−" esta puesto para hacer la notacion consistente con el libro de Hartle.)

$g_{\mu\nu}(P)$ es la metrica en el punto P en las coordenadas x^μ.

- Nota que hay distintos t, x, y, z para cada ref. inercial local, pero se puede usar los mismos x^μ en toda una region del espacio tiempo. Así (1) define la metrica en toda esta región.

- Queda claro que la metrica esta determinada por los referenciales inerciales locales.
- Por otro lado argumentaremos, usando el principio de equivalencia, que la acción para una partícula libre es

$$I = -m\int d\tau = -m\int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

λ un parametro a lo largo de la linea mundo = trayectoria en espacio tiempo

$\Rightarrow$ Movimiento de la partícula esta determinado por $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas $\frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}$.

- Volveremos a todo esto. El punto es que $g_{\mu\nu}$ dado en una region del espacio tiempo determina a los referenciales inerciales locales – los en caida libre sin rotacion tal que particulas libres tienen aceleración cero.

$\Rightarrow$ La gravedad según el concepto de Einstein es definida por una ecuación de campo que determina la metrica en cada punto de espacio tiempo a partir de la distribución de materia, la fuente de gravedad, y condiciones de borde en el espacio y en el tiempo.

- La métrica resulta ser muy parecida al potencial gravitacional de la teoría de Newton. De hecho veremos que en sistemas, como el sistema solar, que están bien descritos por la teoría de gravedad Newtoniana (campos débiles de masas que se mueven lentamente comparado a la luz) se puede elegir coordenadas tal que

$$g_{00} \simeq -(1+2\Phi/c^2)$$

donde x^0 es la coordenada tiempo.

- La ecuación de campo para el potencial Newtoniano Φ es $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, así la ecuacion de campo para $g_{\mu\nu}$ debería ser algo parecido – una ecuación lineal en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$ con una densidad de materia por fuente, salvo que debería haber 10 ecuaciones porque la matriz simetrica $g_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes.

Se puede generalizar ρ el contexto relativista como la densidad de energía (dividido por c^2), y la densidad de energía es la componente T_{00} del tensor estress-energía, una matriz 4×4 simetrica. Lo esencial de las segundas derivadas de la metrica esta captado en la curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, una "matriz" con 4 indices que toman valores $0, 1, 2, 3$.

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left[\partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\alpha \partial_\delta g_{\beta\gamma}\right] + O((\partial g)^2)$$

– Despues de mucha busqueda Einstein llegó en 1915 a su ecuación de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

donde $R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\gamma=0}^{3} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\mu\gamma\nu}$ es el "tensor de Ricci",

$R = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci, y

$g^{\mu\nu}$, con los indices arriba, es la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$.