Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2021

Repartido 2: Generalidades de Anillos

1. *a*) Probar que un conjunto con un único elemento admite una estructura de anillo. Observar que es única, le llamaremos anillo trivial y lo notamos $A = 0$.

   b) Probar que si A no es el anillo trivial, entonces $0 \neq 1$.

2. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define

$$A + B := A \nabla B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A), \qquad AB := A \cap B.$$

   Probar que con estas operaciones $\mathcal{P}(X)$ es un anillo conmutativo. Determinar los elementos invertibles de $\mathcal{P}(X)$.

3. Un *anillo de Boole* es un anillo A tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Probar:

   a) $\mathcal{P}(X)$ con la estructura definida en el ejercicio 2 es un anillo de Boole.

   b) Si A es un anillo de Boole, entonces se verifica $x + x = 0$ para todo $x \in A$.

   c) Todo anillo de Boole es conmutativo.

4. Sea z un elemento de un anillo con inverso a la derecha, *i.e.* existe x tal que $zx = 1$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) z tiene más de un inverso a la derecha.

   b) z no es invertible.

   c) z es divisor de cero a la izquierda *i.e.* existe $0 \neq t$ tal que $zt = 0$.

5. Sea A un anillo. Un elemento $z \in A$ es *nilpotente* si existe un entero positivo n tal que $z^n = 0$.

   a) Probar que si A es un dominio, entonces el único elemento nilpotente es 0.

   b) Probar que $\mathbb{Z}_n$ contiene elementos nilpotentes no nulos si y solo si n es divisible por el cuadrado de un número primo.

   c) Sean x e y elementos nilpotentes de A. Probar que si A es conmutativo, entonces $x + y$ es nilpotente. Probar con un contraejemplo que este resultado no vale en general si A no es conmutativo.

   d) Sea $z \in A$ tal que $z^n = 0$. Probar que $1 - z$ es invertible, siendo $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

6. Probar que todo dominio finito es un cuerpo.

7. Sea A un anillo. Dado un subconjunto no vacío S de A, se define el *centralizador* de S por

$$C(S) = \{x \in A : xs = sx, \ \forall s \in S\}.$$

   El *centro* de A es el centralizador de A; en este caso se escribe $Z(A)$ en vez de $C(A)$.

   a) Probar que $C(S)$ es un subanillo de A y que $S \subset C(C(S))$, para todo $\emptyset \neq S \subset A$.

   b) Sea $A = M_2(\mathbb{R})$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Hallar $C(B)$ y $C(C(B))$.

c) Sea A un anillo, probar que $Z\left(M_n(A)\right) = \{aI_n :\ a \in Z(A)\}$.

d) Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Probar que si $A \in M_n(\Bbbk)$ verifica $AB = BA$ para todo $B \in M_n(\Bbbk)$, entonces existe $a \in \Bbbk$ tal que $A = aI_n$.

8. Se consideran las matrices 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \in M_2(\mathbb{C})$, definidas por:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{H} = \{a1 + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{C})$.

a) Probar que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ y que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.

b) Deducir: $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$.

c) Probar que $\mathcal{H}$ es un subanillo $M_2(\mathbb{C})$.

d) Hallar el centro de $\mathcal{H}$.

El conjunto $\mathcal{H}$ con esta estructura se llama el *anillo de los cuaterniones*. Observar que existen isomorfismos $\{a1 :\ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$ y $\{a1 + b\mathbf{i} :\ a, b \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{C}$, definidos por $a1 \leftrightarrow a$ y $a1 + b\mathbf{i} \leftrightarrow a + bi$, respectivamente. En base al primer isomorfismo, escribiremos a en vez de $a1$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

9. Sea $\mathcal{H}$ el anillo de los cuaterniones. Dado $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathcal{H}$, se definen

$$\overline{x} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}, \quad N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{y} \quad T(x) = 2a.$$

Probar:

a) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ y $\overline{xy} = \overline{y}\ \overline{x}$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

b) $N(x) = x\overline{x}$ y $x^2 - T(x)\,x + N(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

c) $N(xy) = N(x)N(y)$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

d) $\mathcal{H}$ es un anillo con división.

10. Dado $f \in A[[x]]$ no nulo, se define la *valuación* de f como $\operatorname{val}(f) = \operatorname{mín}(\operatorname{sop}(f))$. Además, el coeficiente $\operatorname{val}(f)$-ésimo de f se dice el *coeficiente inicial* de f y se nota $\operatorname{in}(f)$.

Dado $p \in A[x]$ no nulo, se define el grado de p como $\operatorname{gr}(p) = \operatorname{máx}(\operatorname{sop}(p))$. Además, el coeficiente $\operatorname{gr}(p)$-ésimo de p se dice *coeficiente líder* de p y se nota $\ell(f)$.

Se consideran $f, g \in A[[x]]$ y $p, q \in A[x]$ todos no nulos.

a) Probar que $\operatorname{val}(f + g) \geqslant \operatorname{mín}\{\operatorname{val}(f), \operatorname{val}(g)\}$, si $fg \neq 0, \operatorname{val}(fg) \geqslant \operatorname{val}(f) + \operatorname{val}(g)$.

b) Probar que $\operatorname{gr}(p + q) \leqslant \operatorname{máx}\{\operatorname{gr}(p), \operatorname{gr}(q)\}$, si $pq \neq 0, \operatorname{gr}(pq) \leqslant \operatorname{gr}(p) + \operatorname{gr}(q)$.

c) Supongamos ahora que A es un dominio.

   1) Probar que $fg \neq 0$ y $\operatorname{val}(fg) = \operatorname{val}(f) + \operatorname{val}(g)$.
   2) Probar que $pq \neq 0$ y $\operatorname{gr}(pq) = \operatorname{gr}(p) + \operatorname{gr}(q)$.

d) Deducir que si A es dominio, entonces $A[[x]]$ y $A[x]$ también lo son.

11. a) Se define la característica $charA$ de un anillo A como el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $n{,}1_A = 0_A$, en caso de que exista un tal n, y como 0 en caso de que no exista.

b) Probar que si $\mathbb{k}$ es cuerpo, $char\mathbb{k}$ es 0 o es primo. Dar un ejemplo de un cuerpo de característica 0 y uno de carácterística p.

c) Si A es un anillo y $S = \{1\} \subset A$, entonces el subanillo generado por S es el menor subanillo de A y se llama *anillo primo* de A.
Probar que $chark = n$ si y sólo si el anillo primo de A es $\mathbb{Z}_n$ y que $chark = 0$ si y sólo si el anillo primo de A es $\mathbb{Z}$.