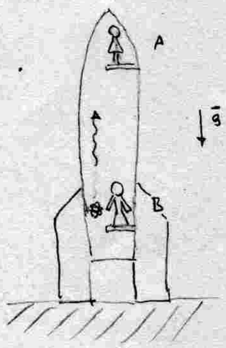
Ya en el artículo de 1907 Einstein usó su principio de equivalencia para calcular algunos efectos gravitatorios a partir de física sin gravedad.

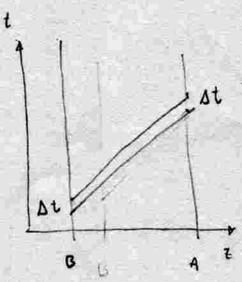
Efecto 1: "Dilación del tiempo" o "corrimiento al rojo" Hartle 6.3

Un átomo con Bob situado en la parte baja de un cohete parado en la superficie de la Tierra emite un pulso de luz de longitud de onda λ_B (frecuencia $f_B = \frac{c}{\lambda_B}$) hacia arriba. Lo recibe Alicia en altura h en la punta del cohete.

¿Cual es la frecuencia f_A que observa Alicia?

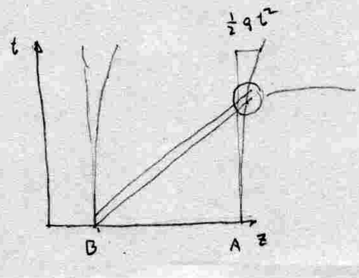
– a primera vista parece que necesariamente $f_A = f_B$

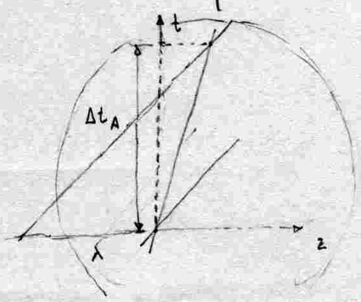




si una cresta es lanzada tiempo Δt luego de otra cresta entonces tendrían que llegar con separación Δt también ya que cada cresta demora el mismo tiempo en subir de B hasta A (en un campo gravitatorio estacionario)

- Pero como sabemos que los relojes de Bob y Alicia miden la coordenada de tiempo t?
- Supongamos que son de idéntica construcción, así si estuvieran en el mismo punto (con la misma velocidad) avanzaron al mismo ritmo. Pero están en distintos lugares en un campo gravitatorio, así ¿quién sabe? capaz no mantienen sincronización.
- Usemos el principio de equivalencia. Supongamos que ahora el cohete está en el espacio exterior lejos de materia y no hay gravedad. El cohete acelera en el sentido de la punta con aceleración g.
- Tratamos el problema en el referencial de reposo de Bob en el momento que se emite el pulso.





- una vez que el pulso llega a Alicia luego de tiempo t_{BA} ella esta alejandose de donde estaba la fuente en el momento de emisión con velocidad $g\,t_{AB}$ y va ver una frecuencia reducida por efecto Doppler.

$$c\Delta t_A = \lambda + v_A \Delta t_A \quad \text{distancia viajado por frente de onda en tiempo } \Delta t_A$$

$$= c\Delta t_B + g\,t_{BA}\Delta t_A$$

$$\left(1 - \frac{g\,t_{BA}}{c}\right)\Delta t_A = \Delta t_B$$

$$\Rightarrow f_A = f_B\left(1 - \frac{g\,t_{BA}}{c}\right)$$

$$= f_B\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

Hasta orden 1 en $\frac{gh}{c^2} = \frac{v_A}{c}$

$$c\,t_{BA} = h + \tfrac{1}{2} g\,t_{BA}^2 = h + \tfrac{1}{2}\frac{gh}{c^2}h + \ldots$$

$\Rightarrow$ A orden cero en $\frac{gh}{c^2}$ $\quad c\,t_{BA} = h$

- El reloj de Alicia esta moviendo con velocidad v_A cuando mide la frecuencia. Si tomamos en cuenta relatividad especial esto produce una correción de orden $\left(\frac{v_A}{c}\right)^2$. Aquí calcularemos solo hasta orden $\frac{v_A}{c}$. (Así vale el Doppler no-relativista.)

- Por principio de equivalencia debe valer la misma formula en el cohete parado sobre la Tierra. Esto es el corrimiento al rojo gravitacional. Fue verificado experimentalmente por Pound y Rebka en 1960 en un experimento muy parecido a la situación descrito aquí (salvo en lugar de un cohete usaron un edificio nomás.)

Efecto 2 : Doblemiento de rayos de luz por gravedad

- Los adherentes a la teoría corpuscolar de luz de Newton pensaban que la gravedad daba a las partículas de luz la misma aceleración $\bar{g}$ como a cualquier otra partícula.

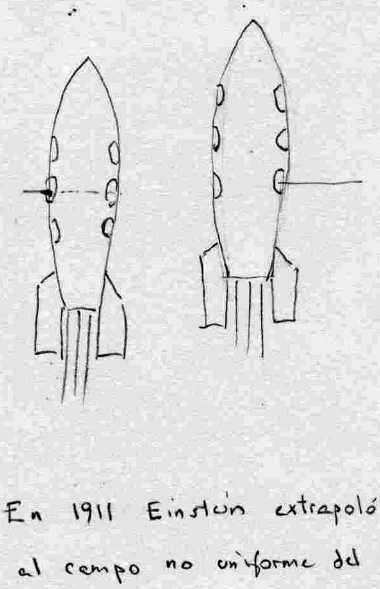
  => rayos de luz que pasan cerca del Sol (u otra masa) desviadas.

- En teoría ondulatoria de luz no parecia haber motivo porque gravedad de Newton afectaría propagación de luz. Para que la onda cambie direccion tiene que ser refractada - velocidad de propagación tendría que ser afectada por gravedad. ¿Porque sera así?

- Vamos otra vez al cohete en el espácio exterior profundo, sin gravedad, pero acelerando hacia adelante con acleración g.

  - un pulso de luz atraviesa el cohete a 90° a su direccion de aceleracion

  - claramente el pulso sale $\frac{1}{2} g t^2$ mas atrás que donde entró, donde $t = \frac{w}{c}$ es el tiempo que el pulso lleva en atravesar la anchura w del cohete



- Por equivalencia la luz debería tener aceleracion g hacia abajo en el cohete parada sobre la Tierra.

- Einstein había encontrado un argumento porque el doblamiento de luz Newtoniano debería valer igualmente si luz es onda o partícula.

- El argumento no involucra relatividad especial solo equivalencia. No se si nadie lo propuso antes

- En 1911 Einstein extrapoló este resultado de campos gravitatorios uniformes al campo no uniforme del Sol - predicho que luz dobla como partícula con velocidad c y aceleración dado por ley de gravedad de Newton. Este doblamiento desplaza las imagenes de las estrellas cuando el Sol pase cerca.

Porque el Sol es muy brillante las estrellas solo se podían observar cerca del Sol durante un eclipse. Se intentó en Brasil 1912 pero estaba tapado por nubes, y en Russia 1914 pero echaron a los astronomos alemanes por el estallido de la primera guerra mundial. Todo por suerte de Einstein porque su predicción estaba mal. En 1915 descubrió con su teoría completa que la no uniformidad del campo es importante – implica que el espacio 3 d es curvo y esto agrega un ángulo a la desviación de luz igual de grande que el que obtuvo por equivalencia. Así su predicción final era que la desviación sería el doble de la desviación Newtoniana, y esto resultó confirmada en la primera medicion exitosa en 1919.

- Campos gravitatorios Newtonianos no uniformes no pueden ser "simulados" exactamente por referenciales no inerciales en ausencia de gravedad.
- Por otro lado hay campos de aceleraciones inerciales en referenciales no inerciales en ausencia de gravedad que nunca pueden surgir como como campos gravitatorios en la teoría de Newton. P. ej. aceleración de Coriolis en un referencial en rotación con velocidad angular $\vec{\Omega}$

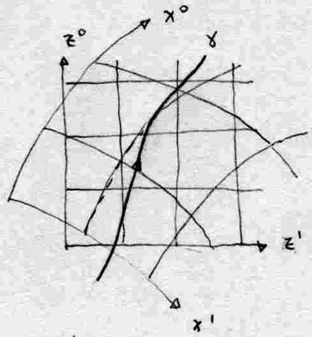
$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = -2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

- Esto es análogo a la aceleración producida por la fuerza magnética en EM. De hecho el pasaje a un referencial en rotación también tiene como consecuencia que todas las masas adquieren un adicional movimiento de circulación. Suponiendo que la ley de gravedad debería ser valido en todo referencial esto sugiere que hay campos "gravitomagneticos" – campos gravitacionales análogos al campo magnético – y que movimiento de materia puede ser la fuente de estos campos. Resulta ser así. El campo gravitomagnético de la Tierra ha sido medido directamente en un experimento muy delicado GP-B 20% error – análisis de datos muy complejo

Tambien ha sido comprobado indirectamente con los movimientos de cuerpos en el sistema solar. Es de gran importancia en agujeros negros con rotación.

- Veamos sistematicamente que tipos de aceleraciones inerciales son posibles. Supongamos que hay dos sistemas de coordenadas x^μ y z^α en espacio tiempo y que haya una curva γ, la linea mundo o trayectoria en el espacio tiempo de una partícula, que esta parametrisado por un parametro λ — oficia de tiempo para la partícula.

Evaluemos la aceleracion $\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2}$ en coordenadas z en terminos de coordenadas x. Las coordenadas z pueden ser inerciales y las x coordenadas cualesquiera.



$$\frac{dz^\alpha}{d\lambda} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Para no tener que escribir un monton de Σs indicando sumas sobre índices adotaremos la convencion de sumación de Einstein: si en una expresión el mismo indice aparece dos veces, una ves arriba (superscripto) y una ves abajo (subscripto) entonces es implicito que se suma sobre todos posibles valores de este indice, y no se indica explicitamente esta sumación. Entonces

$$\frac{dz^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Notas: 1. Un superscripto en el denominador de una derivada cuenta como un subscripto.

2. Coordenadas siempre tienen superscripto

3. Si no quieres sumar sobre un indice repetido hay que decirlo explicitamente. (Esto ocurre muy infrequentemente.)

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right] = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$= \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}\left[\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\beta}\frac{\partial^2 z^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right]$$

$\left(\text{Porque } \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\beta} = \delta^\alpha_\beta\right)$

$$= \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}\left[\frac{dv^\sigma}{d\lambda} + C^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu\right]$$

con $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ y $C^\sigma_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\beta}\frac{\partial^2 z^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$

- δ^α_β es el delta de Kronecker : $\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\beta} \overset{\text{por cadena}}{=} \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

dice que las dos matrices Jacobianas $\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}$ y $\frac{\partial x^\mu}{\partial z^\beta}$ son inversas una de la otra.

- $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ es la velocidad en las coordenadas x^μ

- $C^\sigma_{\mu\nu} = C^\sigma_{\nu\mu}$ es una colección de 40 independientes (en un punto) cantidades que dependen solo de la transformación entre las coordenadas z^α y x^μ.

- Si la aceleración $\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} = 0$ en un punto P entonces

$$\frac{dv^\sigma}{d\lambda} + C^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$$

este punto.

$\Rightarrow$ Si z^α son coordenadas espacio temporales inerciales en P, γ es la línea mundo de una partícula libre, entonces, por definición

$$\left.\frac{d^2 z^\alpha}{(dz^0)^2}\right|_\gamma = 0 \quad \text{a lo largo de } \gamma \text{ en P}$$

$\leftarrow$ la aceleración de la partícula es cero en coordenadas z^α

$\therefore$ Si λ es un parametro tal que $\frac{d^2 z^0}{d\lambda^2} = 0$ en P $\leftarrow$ localmente $z^0 = a\lambda + b$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{dz^0}{d\lambda}\left.\frac{dz^\alpha}{dz^0}\right|_\gamma\right\} = \frac{d^2 z^0}{d\lambda^2}\left.\frac{dz^\alpha}{dz^0}\right|_\gamma + \frac{dz^0}{d\lambda}\frac{dz^0}{d\lambda}\left.\frac{d^2 z^\alpha}{(dz^0)^2}\right|_\gamma$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ En coordenadas x^μ

$$\frac{dv^\sigma}{d\lambda} = - C^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad \text{en P}$$

$- C^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ son las aceleraciones inerciales

Por ejemplo, si z^γ son coordenadas inerciales en todo un espacio tiempo sin gravedad, y x^μ son coordenadas en rotación uniforme con velocidad angular Ω

$$z^0 = x^0 = t \qquad z^3 = x^3 \qquad z^1 = x^1 \cos \Omega x^0 - x^2 \operatorname{sen} \Omega x^0$$

$$z^2 = x^1 \operatorname{sen} \Omega x^0 + x^2 \cos \Omega x^0$$

entonces $C^1_{00} = -\Omega^2 x^1 \qquad C^2_{00} = -\Omega^2 x^2$

$$C^1_{02} = C^1_{20} = -\Omega \qquad C^2_{01} = C^2_{10} = \Omega$$

los demas $C^\sigma_{\mu\nu}$ son cero

$$\frac{d^2x^0}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2x^3}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2x^1}{dt^2} - 2\Omega \frac{dx^2}{dt} \underset{1}{\frac{dx^0}{dt}} - \Omega^2 x^1 \underset{1}{\frac{dx^0}{dt}} \underset{1}{\frac{dx^0}{dt}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv^1}{dt} = 2\Omega v^2 + \Omega^2 x^1$$

– de la misma manera $\frac{dv^2}{dt} = -2\Omega v^1 + \Omega^2 x^2$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \Omega^2 \vec{r}_\perp \qquad \text{con } \vec{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_\perp = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$