

Práctico 2 - Matrices

1. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular: $4A + B$, $(2A)^t - 3B^t$, AB , CA , CA^2B .

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificar que vale $AB = AC$. Este ejemplo muestra que en matrices no vale la propiedad cancelativa del producto. Es decir, que valga $AB = AC$ con $A \neq 0$, no implica $B = C$.

3. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verificar que valen $AB = BA = O$, $AC = A$, $CA = C$, $C^2 = C$, $A^2 = A$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix} = (0 \ 14 \ -3).$$

5. Un laboratorio fabrica tres productos A, B y C, cada uno de los cuales requiere ciertas cantidades de tres tipos de materia prima X, Y y Z, y de mano de obra. Los requerimientos por unidad de cada producto están resumidos en la siguiente matriz

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Las necesidades de materias primas se dan en kg por unidad y las de mano de obra en horas (de trabajo) por unidad. Por ejemplo, la primera fila de R indica que para producir una unidad de producto A, se necesita 2 kg de materia prima X, 4 kg de Y, 5 kg Z y 5 horas de mano de obra.

- a) Supongamos que queremos producir ciertas cantidades a, b, c de productos de tipo A, B, C. Sean x, y, z las cantidades de kilos de las materias primas X, Y, Z y t la cantidad de horas de mano de obra, que se necesitan para producirlos. Se pide:

- 1) Hallar las fórmulas que nos permiten calcular x, y, z, t en función de a, b, c .

2) Encontrar una matriz P tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. ¿Qué relación hay entre P y R ?

b) Supongamos que las tres materias primas cuestan \$2, \$3 y \$1,50 por kg, respectivamente. El costo de mano de obra es de \$5 por hora. Si se fabrican 500, 1000 y 400 productos de tipo A, B y C, respectivamente. ¿Cuál es el costo total de la producción?

6. Se considera una población dividida en dos clases de edad de un año cada una, de la cual se sabe:

- cada hembra de menos de un año tiene una descendiente;
- cada hembra de entre uno y dos años tiene seis descendientes;
- de las hembras de menos de un año sobrevive una de cada tres.

Se pide:

a) Hallar su matriz de Leslie $\mathbb{L}$.

b) Supongamos que tenemos 30 hembras de menos de un año y 10 hembras de entre uno y dos años.

- 1) ¿Cuántas hembras van a haber en cada clase al cabo de un año?
- 2) ¿Cuántas hembras van a haber en total al cabo de dos años?

7. Se considera una población dividida en tres clases de edad de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es la siguiente

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada una de las tres clases de edad se pide:

- 1) ¿En promedio, cuántas hijas tiene una hembra al cabo de 10 años?
- 2) ¿Qué proporción de hembras sobrevive al cabo de 10 años?

b) Supongamos que al cabo de 10 años hay 360 hembras de menos de 10 años, 20 de entre 10 y 20 años y 20 de más de 20 años.

- 1) ¿Cuántas hembras van a haber en cada clase a los 20 años?
- 2) ¿Cuántas hembras habían inicialmente en cada clase?