Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2021

Repartido 1: Generalidades de Grupos

1. Probar que $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

2. Se considera $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$ y $U_n = \{z \in \mathbb{C} :\ z^n = 1\}$ el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad.

   a) Probar que U_n es un subgrupo de $S^1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$.

   b) Sea $\mu = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in U_n$. Se define $\varphi : \mathbb{Z} \to U_n$ mediante $\varphi(k) = \mu^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Probar que φ es un morfismo de grupos.

   c) Probar $U_n \simeq \mathbb{Z}_n$

3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m|n$ y consideramos $m\mathbb{Z}_n = \{\overline{ma} :\ a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}_n$. Hallar $\#\,(m\mathbb{Z}_n)$.

4. Sea p un número primo y $n \in \mathbb{Z}^+$.

   a) Probar que $\mathbb{Z}_p$ no tiene subgrupos propios.

   b) Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^n}$.

   c) Probar que $\mathbb{Z}_{p^n}$ no se puede descomponer como suma directa de subgrupos propios.

5. Sean $(M, *, 1_*)$ y $(M, \circ, 1_\circ)$ dos monoides. Probar que si las operaciones $*$ y $\circ$ conmutan entre sí (una es un homomorfismo con respecto a la otra), entonces coinciden y además la operación es conmutativa.

6. Sea $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ el conjunto de axiomas de grupo abeliano. Probar que son independientes. Es decir, probar que para cada $i = 1, \ldots, 4$ existe una terna $(G, \cdot, e)$ que satisface $\Phi \backslash \{\varphi_i\}$ y no satisface φ_i.

7. Sean $H \leqslant K \leqslant A$, con A grupo abeliano. Probar que

$$\frac{A/H}{K/H} \cong A/K$$

8. Probar el Teorema 0.4.3 de las Notas de Grupos: si $H \leqslant A$ y A abeliano, los subgrupos de A/H están en biyección son los subgrupos de A que contienen a H, y dicha biyección preserva la inclusión.

9. Se considera $\mathbb{R}$ como grupo abeliano con la suma y A un subgrupo arbitrario de $\mathbb{R}$. El objetivo del ejercicio es probar que A es denso o de la forma $\mathbb{Z}x = \{nx :\ n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $x \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que si 0 es un punto de acumulación de A, entonces A es denso.

   b) Probar que si existe $x \in \mathbb{R}$ que es de acumulación de A, entonces 0 es un punto de acumulación de A.

   c) Deducir que A es discreto (*i.e.* no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}$) o es denso.

   d) Probar que si A es discreto, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $A = \mathbb{Z}x$.
   Sugerencia: para el caso $A \neq \{0\}$, probar que existe $x = \text{mín}\,(A \cap \mathbb{R}^+)$ y que $A = \mathbb{Z}x$.