RELATIVIDAD GENERAL 2021 Clase 4

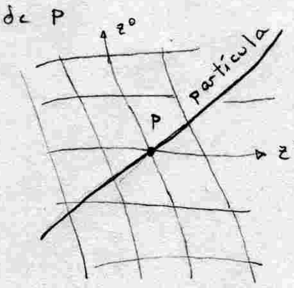
Vamos a extraer las consecuencias del principio de equivalencia de Einstein sistematicamente. La mayor parte de estas son consecuencia de un principio mas débil, y mas precisamente formulado, verificado ya por la teoría de Newton:

· Principio de equivalencia mecánico

Para cada punto P del espacio tiempo hay coordenadas z_P^α, validos en un entorno de P, tales que partículas de prueba libres mueven sin aceleración respecto a ellos en el punto P.

- En otras palabras, existen referenciales inerciales locales, en el sentido de que vale la primera ley de Newton para partículas libres de fuerzas no gravitatorias. Llamamos z_P^α coordenadas inerciales locales.
- Una partícula de prueba es una de tan poca masa (o "carga gravitatoria") que no genera un campo gravitacional apreciable, y mueve en el campo generado por los demás fuentes.
- Aceleración cero significa que la linea mundo es recta. Sin acleración en P se puede expresar como

$\exists$ parametro θ_P de la linea mundo valido entorno de P tal que



(1) $$\frac{d^2 z_P^\alpha}{d\theta_P^2} = 0 \quad \text{en } P$$

Para una linea mundo no trivial (no un punto solo) y parametro λ_P valido $\frac{dz_P^\alpha}{d\theta_P}$ es no cero para algún α.

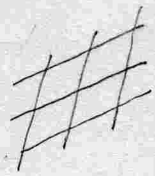
Digamos que $\frac{dz_P^0}{d\theta_P} \neq 0$. Entonces

(2) $$\frac{d^2 z_P^\alpha}{(d z_P^0)^2} = \frac{d}{d z_P^0}\left[\frac{d\theta_P}{dz_P^0}\frac{dz_P^\alpha}{d\theta_P}\right] = \left(\frac{d\theta_P}{dz_P^0}\right)^2 \frac{d^2 z_P^\alpha}{d\theta_P^2} - \frac{dz_P^\alpha}{d\theta_P}\left(\frac{d\theta_P}{dz_P^0}\right)^3 \frac{d^2 z_P^0}{d\theta_P^2}$$

$$= 0 \quad \text{si vale (1)}$$

Por otro lado, si vale (2) entonces vale (1) con $\theta_P = z_P^0$.

- Nota que las coordenadas z_P^α no son necesariamente Cartesianas. No hemos dicho nada sobre distancias o ángulos. Cualquier transformación lineal $y_P^\beta = A^\beta{}_\alpha \, z_P^\alpha$ con A constante e invertible sirve igual.



Veremos ahora que las sistemas de coordenadas, o "cartas", z_P^α definen una "conexión afín" en espacio tiempo, una derivada covariante, tal que las partículas libres de prueba mueven según las geodesicas asociadas a esta.

- Repetimos el calculo del otro día para expresar la ecuación $\frac{d^2 z_P^\alpha}{d\Theta_P^2} = 0$ en P en coordenadas x^μ cualesquiera:

$$\frac{d^2 z_P^\alpha}{d\Theta_P^2} = \frac{d}{d\Theta_P}\left[\frac{\partial z_P^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\Theta_P}\right] = \frac{\partial z_P^\alpha}{\partial x^\sigma}\left(\frac{d^2 x^\sigma}{d\Theta_P^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial z_P^\beta}\frac{\partial^2 z_P^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\Theta_P}\frac{dx^\nu}{d\Theta_P}\right)$$

Entonces $\frac{d^2 z_P^\alpha}{d\Theta_P^2} = 0$ en P $\iff$ $\frac{d^2 x^\sigma}{d\Theta_P^2} + C_P{}^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\Theta_P}\frac{dx^\nu}{d\Theta_P} = 0$ en P

con $C_P{}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial z_P^\beta}\frac{\partial^2 z_P^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$

- Reexpresamos esta ecuación en terminos de un parametro arbitrario η en lugar de Θ_P.

$$\frac{dx^\mu}{d\Theta_P} = \frac{d\eta}{d\Theta_P}\frac{dx^\mu}{d\eta}, \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\Theta_P^2} = \frac{d\eta}{d\Theta_P}\frac{d}{d\eta}\left[\frac{d\eta}{d\Theta_P}\frac{dx^\mu}{d\eta}\right]$$

similar al cálculo con z_P^α y Θ_P recien

$$= \left(\frac{d\eta}{d\Theta_P}\right)^2\left[\frac{d^2 x^\mu}{d\eta^2} + \left(\frac{d\Theta_P}{d\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\frac{d\eta}{d\Theta_P}\right]\right)\frac{dx^\mu}{d\eta}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\sigma}{d\eta^2} + C_P{}^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} + \rho_P\frac{dx^\sigma}{d\eta} = 0 \quad \text{en } P$$

con $\rho_P = \frac{d\Theta_P}{d\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\eta}{d\Theta_P}\right) = -\frac{d\eta}{d\Theta_P}\frac{d^2\Theta_P}{d\eta^2}$

Analogo a Γ pero para parametros de linea mundo en lugar de coordenadas de espacio-tiempo

$$= -\frac{d}{d\eta}\left(\ln\frac{d\Theta_P}{d\eta}\right)$$

Pero entonces $\boxed{\frac{d^2 x^\sigma}{d\eta^2} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} + K\frac{dx^\sigma}{d\eta} = 0 \quad \text{en } \underline{\text{todo}}\ P \text{ en linea mundo}}$

si definimos $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(P) = C_P{}^\sigma{}_{\mu\nu}(P) \qquad K(P) = \rho_P(P)$

- En cada punto P usamos las segundas derivadas de las coordenadas inerciales locales z_P^α y el parametro inercial local θ_P asociados a este punto P para definir $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ y K en P.

- Las curvas soluciones de

$$0 = \frac{d^2 x^\sigma}{d\eta^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} + K \frac{dx^\sigma}{d\eta}$$

se llaman geodesicas. La ecuación (3) es la ecuación de geodesicas en coordenadas y con parametro arbitrarios.

- El principio de equivalencia mecánico implica entonces que particulas libres de fuerzas no gravitatorias mueven según las geodesicas de algún campo $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. (K tiene que ver solo con la parametrización y veremos pronto que siempre lo podemos hacer cero mediante una reparametrización.)

- $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ define las aceleraciones gravitatorias en las coordenadas x^μ. Es como el campo de aceleración $\bar{g}$ en la teoría de Newton. Hasta el final de sus días Einstein llamó a Γ "el campo gravitatorio". Γ capta matematicamente a los referenciales inerciales locales.

- Dijimos anteriormente que el campo que representa matematicamente a los referenciales inerciales locales es la métrica. En relatividad general la metrica determina Γ mediante

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right)$$

Esto es esencialmente consecuencia del principio de equivalencia de Einstein que exige que incorporamos relatividad especial localmente. Llegaremos a esto en algunas clases.

Dije que podemos hacer desaparecer a κ mediante reparametrización de las geodésicas. Resulta que mientras en general no hay coordenadas inerciales globales, z^α que hacen cero las aceleraciones de partículas libres, en todo el espacio tiempo, sí hay parametros inerciales globales siempre:

Definimos λ por la ecuación diferencial

$$(3) \qquad \kappa(\eta) = -\frac{d}{d\eta}\left(\ln \frac{d\lambda}{d\eta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \left(\frac{d\eta}{d\lambda}\right)^2\left[\frac{d^2x^\mu}{d\eta^2} + \kappa\frac{dx^\mu}{d\eta}\right]$$, y por supuesto $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\eta}$

$\Rightarrow$ la ecuacion geodesica se reduce a

$$\boxed{0 = \frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$ — Ecuación de geodésica con parametro afín.

¿Y, se puede resolver la ecuacion (3)? ¡Siempre!

$$(3) \Leftrightarrow \ln\frac{d\lambda}{d\eta} = -\int_0^\eta \kappa(\eta')\,d\eta' + \text{constante}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\eta} = A\, e^{-\int_0^\eta \kappa(\eta')\,d\eta'}, \quad A \text{ un constante}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\eta) = A\int_0^\eta e^{-\int_0^{\eta'}\kappa(\eta'')\,d\eta''}\,d\eta' + B, \quad B \text{ otro constante}$$

— λ se llama un "parametro afín". El paramétro afín de una geodesica es determinado a menos de una transformacion afín

$$\lambda_2 = A\lambda_1 + B$$

- Es claro que las referenciales inerciales locales definen a los Γ.

¿Los Γ definen a los referenciales inerciales locales? Sí, porque definen el movimiento de partículas libres. De hecho cualquier campo de $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ simetrico en μ,ν corresponde a unos referenciales inerciales locales

$$z_p^\alpha = \underbrace{A^\alpha_{\ \sigma}}_{\text{matriz invertible constante}}\left[\tfrac{1}{2}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(P)(x^\mu - x^\mu(P))(x^\nu - x^\nu(P)) + (x^\sigma - x^\sigma(P))\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial z_p^\alpha}{\partial x^\mu}\right|_p = A^\alpha_{\ \mu}, \qquad \frac{\partial x^\sigma}{\partial z_p^\beta}\left.\frac{\partial^2 z_p^\beta}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right|_p = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(P)$$

$\Rightarrow$ A partir de esto el principio de equivalencia mecanico no hay limitacion sobre el campo $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ salvo $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}$.

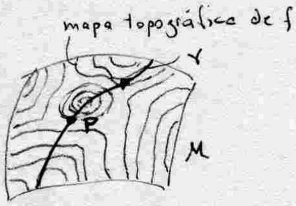
Los $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ definen una derivada covariante. Una derivada covariante define la derivada de un campo vectorial u a lo largo de otro campo vectorial v, dando un campo vectorial, es decir

$$D_v u$$

es un campo vectorial.

- Primero tenemos que definir vectores. Los vamos a definir como operadores de que sacan la derivadas tangentes a curvas

Si f es una funcion sobre espacio tiempo $\mathcal{M}$ (le doy un nombre por fin!) que tome valores reales, $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, y γ es una curva con parametro σ. Entonces esta definido $\dfrac{df}{d\sigma}$



P.ej. se puede diferenciar coordenadas x^μ, que en definitiva so cuatro funciones $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

$$t^\mu(P) = \left.\frac{dx^\mu}{d\sigma}\right|_P$$

se llaman los componentes del tangente de γ en P, punto sobre γ.

Para f arbitrario $\qquad \left.\dfrac{df}{d\sigma}\right|_P = \left.\dfrac{dx^\mu}{d\sigma}\right|_P \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_P = t^\mu(P) \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_P$

$\Rightarrow$ Los operadores de derivada tangente en P a curvas á traves de P conforman un espacio 4 dimensional (que llamaremos T_P, el espacio tangente a $\mathcal{M}$ en P). Cada operador es una combinacion lineal de los 4 operadores $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_P$ que en definitive tambien son operadores de derivada tangente (a los ejes de coordenados de x^μ).

$t^\mu = \left.\dfrac{dx^\mu}{d\sigma}\right|_P$ son los componentes del operador $\dfrac{d}{d\sigma}$ en la base $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$.

$$\frac{d}{d\sigma} = t^\mu \partial_\mu$$

$\partial_\mu|_P$ se llama la base de coordenadas de T_P assocado a las coordenadas x^μ

Cuando cambiemos de coordenadas a nuevas, y^ρ, entonces cambie la base de coordenadas, y los correspondientes componentes del vector $t = \frac{d}{d\sigma}$

$$t^\rho = \frac{dy^\rho}{d\sigma} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} t^\mu$$

Ahora podemos definir la derivada covariante de un campo vectorial. La idea es derivar segun v a los componentes de u en la base de coordenadas de z_p^α, coordenadas inerciales locales asociado con p y interpretar el resultado como componentes de un vector

$$D_v u(p) = v^\mu \partial_\mu \left[u^\sigma \partial_\sigma z_p^\alpha \right] \partial_{z_p^\alpha} |_p$$

$$= v^\mu \partial_\mu u^\sigma \partial_\sigma |_p + v^\mu u^\nu \partial_\mu \partial_\nu z_p^\alpha \partial_{z_p^\alpha} |_p$$

$$= v^\mu \left[\partial_\mu u^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\nu \right] \partial_\sigma |_p$$

Aparecio nuestro viejo amigo $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \partial_{z_p^\alpha} x^\sigma \, \partial_\mu \partial_\nu z_p^\alpha$!

- Otro modo de describir la derivada covariante es que transformar los componentes de tu vector al referencial inercial local, sacas una derivada común, y luego transformes los 4 derivadas como componentes de vector a las coordenadas originales

- Nota que la ecuacion de geodesicas se puede escribir como

$$D_v v = 0$$

con $v = \frac{d}{d\lambda}$ la tangente a la geodesica con parametro afin.