Queremos probar que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right] f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} [-4\pi\delta(\vec{r})] f(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Por la definición de derivada de distribuciones tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r}) d^3\vec{r} = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Que es igual al límite cuando $R \to 0$ de la integral en todo el espacio excepto en una esfera que contiene al origen. (Esto es porque f es diferenciable a todos los órdenes y la contribución en el origen a la integral $\int_{S_R^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r}$ tiende a cero ya que al ser $\partial_i^n f$ multiplicadas por r (debido al diferencial volumen que introduce un r^2) e integradas en el límite $R \to 0$, se anula).

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \lim_{R\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - S_R^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Integrando por partes obtenemos que:

$$\lim_{R\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - S_R^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \lim_{R\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - S_R^3} \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right] - \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla f(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Integrando nuevamente se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \lim_{R\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - S_R^3} \left\{\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right] - \nabla\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r})\right] + \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r})\right\} d^3\vec{r}$$

Ya que estamos integrando por fuera de una esfera centrada en el origen $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ para todo $\vec{r}$ en la región de integración, por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \lim_{R\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - S_R^3} \left\{\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right] - \nabla\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r})\right]\right\} d^3\vec{r}$$

Dado que no tenemos ninguna singularidad en la región de integración, podemos utilizar el teorema de Gauss sin problemas

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \lim_{R\to 0}\left(-\int_{S_R^2} \left\{\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right] - \left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r})\right]\right\}\cdot\hat{r} d^2\vec{r}\right) + \lim_{R\to\infty}\left(\int_{S_R^2} \left\{\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right] - \left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right) f(\vec{r})\right]\right\}\cdot\hat{r} d^2\vec{r}\right)$$

El signo de menos proviene de que la normal a la superficie es saliente del volumen y por tanto hacia dentro de la esfera. Es decir, según $-\hat{r}$. En la superficie exterior, hacia ∞ la normal es saliente.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R^2}\left\{\left[\left(\frac{1}{r}\right)\nabla f(\vec{r})\right]-\left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)f(\vec{r})\right]\right\}\cdot\hat{r}d^2\vec{r}=\lim_{R\to\infty}\int_{S_R^2}\left\{\left[\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r}\right]+\left[\frac{1}{R^2}f(\vec{r})\right]\right\}R^2 sen(\theta)d\theta d\phi$$

Como las funciones de prueba f son de soporte compacto (es decir, distintas de cero para un conjunto cerrado y acotado) se llega a qué:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{S_R^2}\left\{R\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r}+f(\vec{r})\right\}sen(\theta)d\theta d\phi\right)=0$$

Por otro lado tenemos los términos en la esfera tendiendo a cero:

$$\lim_{R\to 0}\left(-\int_{S_R^2}\left\{R\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r}+f(\vec{r})\right\}sen(\theta)d\theta d\phi\right)=\lim_{R\to 0}\left(-\int_{S_R^2}R\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r}sen(\theta)d\theta d\phi-\int_{S_R^2}f(\vec{r})sen(\theta)d\theta d\phi\right)$$

El primero de estos términos es cero ya que $\partial_i^n f$ integradas en el límite $R\to 0$ multiplicadas por R se anula. Analizando el segundo de los términos, vemos que en el límite $R\to 0$, $f(\vec{r})\to f(\vec{0})$ mientras que la integral angular es igual a 4π.

De esta forma encontramos que:

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right]f(\vec{r})d^3\vec{r}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{r}\nabla^2 f(\vec{r})d^3\vec{r}=-4\pi f(\vec{0})=\int_{\mathbb{R}^3}[-4\pi\delta(\vec{r})]f(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Y por tanto decimos que $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\vec{r})$ en el sentido de distribuciones. Notemos, que la noción de derivada de una distribución utilizada en el primer paso, nos permite evadir el problema de la singularidad en el origen y aplicar el teorema de Gauss con total validez.