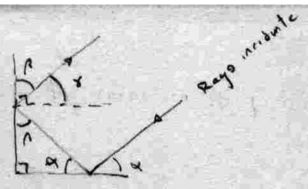
3. a) Hastle 2,1

a) 

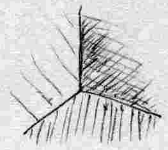
$\beta = 90° - \alpha$

$\gamma = 90° - \beta = \alpha$

b) En 3 dimensiones conviene pensarlo de otra manera:

Hace a los planos de coordenadas cartesianas coincidir con los tres espejos.

Consideramos la reflexión del rayo en un espejo



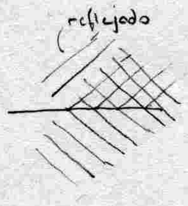
- la componente de la velocidad del rayo paralelo al espejo se conserva

- la componente de la velocidad perpendicular al rayo cambia de signo

Entonces las tres coordenadas cartesianas de un pulso de luz evolucionan independientemente cada uno de manera muy sencilla. La coordenada, x digamos decrece acercandose al espejo en $x = 0$ con velocidad uniforme $\frac{dx}{dt} = v$. Luego rebota y se aleja con velocidad $\frac{dx}{dt} = -v$.

El resultado es que luego del ultimo rebote el pulso reflejado tenga velocidad opuesta al pulso incidente.

La luz que llega a la Luna es un tren de frentes de ondas bastante ancho en comparación con el retroreflector. Habría que pensarlo en terminos de ondas. Una manera conceptual es notar que cuando una onda de luz es reflejado en un espejo la onda reflejada se obtiene imaginando que la onda va a través del espejo y luego tomando la parte de la onda atras del espejo $f(x,y,z)$ y mapeandola al lado delante el espejo cambiando al signo de la coordenada, x, perpendicular al espejo



$f_{ref}(x,y,z) = f(-x,y,z)$ (o $-f(-x,y,z)$ depende de condiciones de borde)

Una vez que se completan las reflexiones hay

$f_{ref}(x,y,z) = \pm f(-x,-y,-z)$ ← reflejado directo hacia atras!

b) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo (en la teoría de Newton) es el trabajo que hace la gravedad si se desarma al cuerpo y se dispersa en partes infinitamente chicas en direcciones distintas al ∞.

Si el cuerpo es esférico, de densidad uniforme, el trabajo que hace la gravedad al sacarse una capa superficial de grosor dr y masa $dM = \rho\, 4\pi r^2 dr$

$$-\frac{G\, M\, dM}{r} = -\frac{G \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \; 4\pi r^2 \rho\, dr}{r}$$

$$= -G\frac{(4\pi)^2}{3}\rho^2\, r^4\, dr$$

$\Rightarrow$ La energía potencial es

$$U = -G\frac{(4\pi)^2}{3}\rho^2\int_0^R r^4\, dr = -G\frac{(4\pi)^2}{3}\rho^2\frac{R^5}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}\, G\left(\frac{4\pi}{3}\rho R^3\right)^2\frac{1}{R} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{U}{Mc^2} = -\frac{3}{5}\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{4\pi}{5}\frac{G\rho R^2}{c^2}$$

Para la Tierra $\dfrac{m_{pot}}{m_{inercial}} = \dfrac{U}{Mc^2} = -\dfrac{4\pi}{5}\dfrac{6.7\times10^{-11}\,\cancel{m^3}\,\cancel{kg^{-1}}\,\cancel{s^{-2}}}{(3.0\times10^{8}\,\cancel{m\,s^{-1}})^2}\; 5.5\times10^3\,\cancel{kg}\,\cancel{m^{-3}}$

$$\times(6.4\times10^6\,\cancel{m})^2$$

$$= 4.2\times10^{-10}$$

Para la Luna $\dfrac{m_{pot}}{m_{inercial}} = -\dfrac{4\pi}{5}\dfrac{6.7\times10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}{(3.0\times10^{8}\,m\,s^{-1})^2}\; 3.3\times10^3\,kg\,m^{-3}$

$$\times(1.7\times10^6\,m)^2$$

$$= 1.8\times10^{-11}$$

Si toda la masa inercial contribuye a la masa gravitacional pasiva (con razón 1:1) salvo la energía potencial gravitatoria, entonces $\dfrac{m_{grav}}{m_{inercial}} = 1 - \dfrac{m_{pot}}{m_{inercial}}$

$$\left|\left(\frac{m_{grav}}{m_{inerc.}}\right)_{\oplus} - \left(\frac{m_{grav}}{m_{inerc.}}\right)_{☽}\right| = \left|1.8\times10^{-11} - 4.2\times10^{-10}\right| = 4.0\times10^{-10} \leftarrow$$

~2700 veces mínimo detectable

4. Hartle ejercicio 6.3

Digamos que el cohete tiene anchura w. La luz demora aproximadamente

$t = \frac{w}{c}$ en atravesarlo. En este tiempo cae una distancia

$$l = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \frac{w^2}{c^2}$$

y queremos que esto sea $l = 1\,\text{mm}$. Entonces

$$w = \sqrt{\frac{2l}{g}}\, c = \sqrt{\frac{2\times 10^{-3}\,\cancel{m}}{9.8\,\cancel{m}\,s^{-2}}}\; 3.0\times 10^{8}\,m\,s^{-1} = 4.2\times 10^{6}\,m$$

$$\simeq 4200\,\text{km}$$

Este es un cohete muy gordo! Pero quien sabe, capaz con espejos, interferometría y ingenio se puede medir en la Tierra.

5. Mirando un reloj h metros debajo de uno en un campo uniforme de aceleración g uno ve que anda con frecuencia menor;

$$f_{debajo} = f_{arriba}\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) = f_{arriba}\left(1 - \frac{\Phi_{arriba} - \Phi_{debajo}}{c^2}\right)$$

Si extrapolamos al campo no uniforme de la esfera de masa

$$f_{centro} = f_{\infty}\left(1 + \frac{\Phi_{centro}}{c^2}\right) \quad \text{- tomamos } \Phi = 0 \text{ en el infinito}$$

Deseamos que el reloj en el centro va lento por 1 día en 365

$$\Rightarrow \frac{\Phi_{centro}}{c^2} = -\frac{1}{365}$$

Según la teoría de Newton, que tendría que ser OK ya que $\frac{\Phi}{c^2} \ll 1$,

$$\Phi_{centro} = -\int_0^{\infty} g(r)\, dr \quad \leftarrow \text{ estamos contando } g \text{ positivo hacia abajo así } g = \frac{d\Phi}{dr}$$

$$= -G\int_0^R \frac{4\pi}{3}\frac{r^3 \rho}{r^2}\, dr - G\int_R^{\infty} \frac{4\pi}{3}\frac{R^3\rho}{r^2}\, dr$$

$$= -G\frac{4\pi}{3}\rho\frac{R^2}{2} - G\frac{4\pi}{3}\rho R^3 \frac{1}{R} = -\frac{GM}{R}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow M = -\Phi_{centro}\,\frac{2}{3}\frac{R}{G} = \frac{c^2}{365}\,\frac{2}{3}\,\frac{R}{G}$$

6. Aceleraciones inerciales en un referencial en rotación.

Porque las coordenadas z^α son inerciales partículas libres mueven sin aceleración en esta carte.

$$\frac{d^2 z^\alpha}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 z^\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\right) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$= \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}\left(\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\rho}\frac{\partial^2 z^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)$$

Si $\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\sigma}$ es invertible $\frac{d^2 z^\alpha}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

con $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial z^\rho}\frac{\partial^2 z^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$

$$z^0 = x^0 = t \qquad z^3 = x^3 \qquad \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\operatorname{sen}\Omega t \\ \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \\ -\operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z^0}{\partial x^\mu} = \delta^0_\mu \qquad \frac{\partial z^3}{\partial x^\mu} = \delta^3_\mu \qquad \left[\frac{\partial z^A}{\partial x^M}\right] = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\operatorname{sen}\Omega t \\ \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}$$

A, M, todas letras Romanas mayusculas son indices con valores 1, 2

$$\frac{\partial z^A}{\partial x^3} = 0 \qquad \left[\frac{\partial z^A}{\partial x^0}\right] = -\Omega\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \\ -\cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial^2 z^0}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \quad \frac{\partial^2 z^3}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$. Las unicos segundas derivadas no cero de z^A son

$$\left[\frac{\partial^2 z^A}{\partial x^0 \partial x^0}\right] = -\Omega^2\begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\operatorname{sen}\Omega t \\ \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \qquad \left[\frac{\partial^2 z^A}{\partial x^0 \partial x^M}\right] = -\Omega\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \\ -\cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \end{bmatrix}$$

Para evaluar $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ necesitamos $\frac{\partial x^\sigma}{\partial z^B}$. $\frac{\partial x^0}{\partial z^B} = 0$, $\frac{\partial x^3}{\partial z^B} = 0$, $\frac{\partial x^S}{\partial z^B} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \\ -\operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}$

Los únicos $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ no cero son los con $\sigma = 1,2$ y $\mu\nu = 00, 01, 02, 10, 20$

$$\Gamma^{s}_{00} = \frac{\partial x^s}{\partial z^\beta} \cdot \frac{\partial^2 z^\beta}{\partial x^0 \partial x^0} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{s}_{0n} = \frac{\partial x^s}{\partial z^\beta} \frac{\partial^2 z^\beta}{\partial x^0 \partial x^n} = -\Omega \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \\ -\operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \\ -\cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \end{bmatrix}$$

$$= -\Omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma^{1}_{02} = \Gamma^{1}_{20} = -\Omega \qquad \Gamma^{2}_{01} = \Gamma^{2}_{10} = \Omega$ son los únicos $\Gamma^{s}_{0n} = \Gamma^{s}_{n0}$ no cero

$$\frac{d^2 x^0}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2 x^3}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2 x^s}{dt^2} = -\Gamma^{s}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \qquad \frac{dx^0}{dt} \equiv \frac{dt}{dt} = 1$$

$$= -\Gamma^{s}_{00} - 2\Gamma^{s}_{0n} \frac{dx^n}{dt}$$

$$= +\Omega^2 x^s + 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{dx^n}{dt}$$

$$\bar{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \qquad \bar{r}_{perp} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 x^s}{dt^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\Omega^2 \bar{r}_{perp}}_{\text{centrifuga}} - \underbrace{2\bar{\Omega} \times \bar{v}}_{\text{Coriolis}}$$