RELATIVIDAD GENERAL 2021 — Clase 5, 6 — Reisenberger

En la anterior clase definimos la derivada covariante de vectores

$$D_\mu u^\sigma = \partial_\mu u^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\nu$$

La motivacion por esta definición es que $v^\mu D_\mu u^\sigma$ es lo que uno obtiene si uno

1. Transforma u a coordenadas inerciales z_P^α : $u^\alpha = \frac{\partial z_P^\alpha}{\partial x^\mu} u^\mu$
2. Diferencia los componentes z_P^α a lo largo de v en P :

$$D_v u^\alpha\big|_P = d_v u^\alpha\big|_P = v^\mu \partial_\mu u^\alpha\big|_P = v^\beta \partial_\beta u^\alpha\big|_P$$

3. Transforma de vuelta a la carta x^μ

$$D_v u^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial z_P^\alpha} D_v u^\alpha$$

1.* Nota que D no depende de cuales de las muchas equivalentes coordenadas inerciales z_P^α asociado con el punto P que se use para evaluar D en P:

- Por definición z_P *equivalentes* definen las mismas curvas geodesicas.
- Ahora fija una carta x^μ y parametriza las geodesicas con $\eta = x^0$. Entonces

$$\frac{d^2x^\sigma}{dx^{0\,2}} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0} - K\frac{dx^\sigma}{dx^0}$$

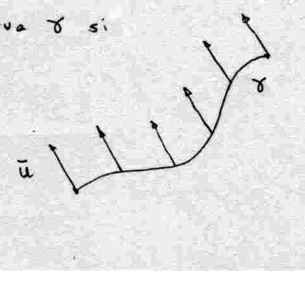
$\Rightarrow$ la aceleración $\frac{d^2x^\sigma}{dx^0}$ como función de la velocidad $\frac{dx^\sigma}{dx^0}$ en P para geodesicas determina $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ en la carta x de manera única, y entonces tambien la derivada covariante

2. Nota que por definición $D_v u^\mu$ transforme como un vector: En coordenadas y^ρ

$$D_v u^\rho = \frac{\partial y^\rho}{\partial z_P^\alpha} D_v u^\alpha = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial z_P^\alpha} D_v u^\alpha = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} D_v u^\sigma$$

• La derivada covariante define una noción de *transporte paralelo* :

Def^n u es transportado paralelamente a lo largo de una curva γ si $D_v u = 0$ en todo γ con v tangente a γ.



Regla de transporte paralelo:

En coordenadas inerciales locales z_P^α nuestra derivada covariante reduce en P a una derivada común de los componentes:

$$[D_\sigma u]^\alpha_P = d_\sigma [u^\alpha]|_P$$ ← solo en la segunda expresión el indice esta "dentro de la derivada". Es decir la componente α de la derivada es la derivada de la componente α.

Así, $D_\sigma u = 0$ implica que en cada punto P en γ $d_\sigma u^\alpha|_P = 0$ en cartas inerciales locales z_P^α.

Moralmente estamos transportando u a lo largo de γ manteniendo sus componentes constantes en una referencial inercial, solo que cambiar de referencial inercial local todo el tiempo mientras avanzamos a lo largo de γ porque estas referenciales son cada uno inercial solo en un punto. Pero hay una manera mas sencilla de de expresar la regla de transporte paralelo.

Base transportada paralelamente

- Supongamos que $e_{(\eta)}$ $\eta = 0,1,2,3$ es una base de vectores en un punto P sobre γ. (La parentésis entorno al indice η es para marcar que η indica el vector de la base, y no es el indice de un componente de un vector. En otras palabras $e_{(1)}$ es un vector, no un componente.)

- Definimos $e_{(\eta)}$ en todo γ transportando cada vector paralelamente a lo largo de γ a cada punto, tal que

$$D_\sigma e_{(\eta)} = 0$$

Entonces transporte paralelo según γ de cualquier otro vector u se realiza manteniendo los componentes u^η de u en la base $e_{(\eta)}$ constantes.

<u>Demostración:</u> Supongamos $u = u^\eta e_{(\eta)}$ en P, y los coeficientes u^η son constantes a lo largo de γ. En una carta z^α_Q inercial en un punto Q de γ

$$D_\sigma u|^\alpha_Q = d_\sigma u^\alpha|_Q = d_\sigma[u^\eta e^\alpha_{(\eta)}]_Q = [d_\sigma u^\eta]e^\alpha_{(\eta)} + u^\eta[D_\sigma e_{(\eta)}]^\alpha$$
$$= 0 + 0 \quad ▨$$

De paso esto muestra que

1. Transporte paralelo es lineal: Si s y t son vectores y $u = as + bt$ con coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, entonces los transportes paralelos s'', t'' y u'' de estos vectores satisfacen $u'' = as'' + bt''$.

$\Rightarrow$ 2. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente entonces su transporte paralelo también lo es. Si fuera linealmente <u>dependiente</u> entonces los vectores originales también lo son.

$\Rightarrow$ 3. El transporte paralelo a Q de la base $e_{(\eta)}$ en P es una base en Q.

(Nota que el resultado demostrado arriba requiere solo que $e_{(\eta)}$ sea una base en P.)

Ahora que hemos establecido que $e_{(\eta)}$ es una base en cada punto de γ podemos definir la derivada covariante a lo largo de γ de cualquier vector w en términos de sus componentes w^η en la base $e_{(\eta)}$. En $Q \in \gamma$ en coordenadas inerciales locales z^α_Q

$$[D_\sigma w]^\alpha = d_\sigma[w^\eta e^\alpha_{(\eta)}] = (d_\sigma w^\eta)e^\alpha_{(\eta)} + w^\eta \overset{0}{\underset{''}{d_\sigma[e^\alpha_{(\eta)}]}}$$
$$= (d_\sigma w^\eta)\, e^\alpha_{(\eta)}$$

Así, en la base $e_{(\eta)}$ $[D_\sigma w]^\eta = d_\sigma[w^\eta]$ en todo γ.

De la regla de transporte paralelo podemos definir a la derivada covariante en términos de ella:

$$D_v \omega|_Q = \lim_{\sigma \to \sigma(Q)} \frac{\omega(\sigma)^{\parallel}(Q) - \omega(Q)}{\sigma - \sigma(Q)}$$ con $\omega(\sigma)^{\parallel}(Q)$ siendo $\omega(\sigma)$ transportado paralelamente a Q

Esto es obvio en la base $e_{(\eta)}$ transportada paralelamente:

$$D_v \omega|_Q^\eta = d_v[\omega^\eta]_Q = \lim_{\sigma \to \sigma(Q)} \frac{\omega^\eta(\sigma) - \omega^\eta(Q)}{\sigma - \sigma(Q)} = \lim_{\sigma \to \sigma(Q)} \left[\frac{\omega(\sigma)^{\parallel}(Q) - \omega(Q)}{\sigma - \sigma(Q)}\right]^\eta$$

Γ

El término con Γ en $D_v \omega^\sigma = d_v \omega^\sigma + \Gamma^\sigma_{v\mu}\omega^\mu$ da cuenta del hecho que la base de coordenadas ∂_μ de la carta x^μ no esta transportada paralelamente a lo largo de γ. En otras palabras, da cuenta de la derivada covariante de ∂_μ.

Efectivamente

$$[D_\mu \partial_\rho]^\sigma = \partial_\mu[\delta^\sigma_\rho] + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta^\nu_\rho = \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \qquad \longleftarrow [\partial_\rho]^\sigma = \partial_\rho x^\sigma = \delta^\sigma_\rho$$

Así, si diferenciamos a lo largo de v $\Gamma^\sigma_{v\rho} \equiv v^\mu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} = [D_v \partial_\rho]^\sigma$

Derivando más que vectores

Un importante motivo por desarollar a la derivada covariante, y la noción de vectores, es para poder expresar a las leyes de física no gravitacionales de manera eficiente en un espacio tiempo cualquiera. El principio de equivalencia de Einstein nos promete que en coordenadas inerciales locales estos sean los mismas como en coordenadas inerciales en ausencia de gravedad, (o lo mas parecido posible dado que en presencia de gravedad no hay coordenadas inerciales globales). Pero preferimos trabajar con una sola, arbitrária carta x^μ sobre una region de espacio tiempo que con un montón de cartas inerciales z^α_P.

En el caso del movimiento de una partícula libre empezamos con la ley

$$0 = \frac{d^2 z^\alpha_P}{d\Theta_P^2} = d_v v^\alpha \quad \text{con} \quad v^\alpha = \frac{d z^\alpha_P}{d\Theta_P}$$ y lo traducimos a $0 = [D_v v]^\mu = d_v v^\mu + \Gamma^\mu_{v\nu} v^\nu$

En palabras: la ley que la partícula mantiene la misma velocidad en coordenadas inerciales traduce a que la velocidad es transportada paralelamente a lo largo de la línea mundo de la partícula.

Para poder expresar otros leyes de física no gravitacionales debemos poder traducir derivadas de otras cosas que vectores desde coordenadas inerciales locales a coordenadas cualquieras.

Necesitamos derivadas de escalares, de gradientes y mas generalmente de tensores.

Derivada covariante de un escalar

- un campo escalar es una función tomando valores en $\mathbb{R}$ ($\circ$ $\mathbb{C}$) sobre espacio tiempo
- su valor en un punto dado no depende de la elección de coordenadas o una base.
  - Esto es distinto a los componentes de un vector que sí cambian con cambios de base. ((Aunque si esta fijado a cual base los componentes se refieren entonces los componentes con respecto a esta base sí son escalares. Son solo los componentes a^0, a^1, a^2, a^3 de un vector a vistos como funciones de la base a que refieren que no son escalares. Es la diferencia entre una funcion y su valor en algun argumento dado.
- Sea f entonces un campo escalar. Aplicando la prescripcion "transformar a coordenadas inerciales locales z_p^α, diferenciar, y transformar de vuelta a las coordenadas originales" para definir a la derivada covariante se hace algo trivial, ya que f en un punto dado no cambia con las coordenadas. Así

$$D_v f = d_v f \quad \leftarrow \text{porque es } d_v f \text{ en la carta } z_p^\alpha$$

Nota: Las componentes u^μ de un vector en una base dada son escalares entonces $D_v[u^\mu] = d_v[u^\mu]$. Esto es correcto. Pero $D_v[u^\mu] \neq [D_v u]^\mu$: la derivada covariante de la componente μ no es el componente μ de la derivada covariante.

- Transporte paralelo según una curva γ: Para transportar un valor s paralelamente tenemos que definir s en los puntos de γ tal que $d_v s = 0$. En otras palabras, tenemos que mantener s constante a lo largo de γ. El transporte paralelo de s desde P hasta Q por cualquier camino es el mismo valor s.

Covectores y sus derivados covariantes Hartle 20.2

- Gradientes son ejemplos de un tipo de objetos matemáticos llamados "covectores", o "1-formes", o "formas diferenciales", o "vectores duales". Otro ejemplo es el potencial vectorial $\vec{A}$ en electromagnetismo. — Tiene una versión 4-d $A_\mu = [-\phi, A_1, A_2, A_3]$.
  A_μ tiene un solo indice, pero abajo, y transforma de una carta de otra como los componentes de un gradiente, no un vector

$$A_\eta(P) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\eta} A_\mu(P) \quad \text{como} \quad \partial_\eta f|_P = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\eta} \partial_\mu f|_P \quad \underline{\text{no}} \quad v^\eta(P) = \frac{\partial y^\eta}{\partial x^\mu} v^\mu(P)$$

- En transformaciones entre coordenadas Cartesianas los dos matrices

$$M_\eta{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\eta} \quad y \quad M^{-1\,t}{}_\eta{}_\mu = \frac{\partial y^\eta}{\partial x^\mu}$$

son iguales, así se puede tratar gradientes y otros covectores como $\bar{A}$ como vectores mientras simpre se usan coordenadas locales (o mas bien bases ortonormales) para definir los componentes

— a veces se usan coordenadas no Cartesianas, como esfericas, pero todavia bases ortonormales.

Definición covector

Un covector ω es un mapa lineal de vectores tangentes a $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$\omega : T_P \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \omega[v]$$ ← ω evaluado en un vector v da el numero $\omega[v]$

Las derivades parciales $\partial_\mu f$ define un covector, llamado el gradiente y escrito df, que toma un vector $v = \frac{d}{d\eta}$ y da $df[v] = \frac{df}{d\eta}$ $(= v^\mu \partial_\mu f = d_v f)$

- El espacio de covectores en un punto P, los mapos $T_P \to \mathbb{R}$, se llama T_P^*, el "dual" de T_P.

- Si $\omega \in T_P^*$ entonces $\omega[\frac{d}{d\eta}] = \omega[\sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\eta} \partial_\mu] = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\eta} \omega[\partial_\mu]$ por linealidad de ω.

$\omega_\mu \equiv \omega[\partial_\mu]$ son los componentes de ω en le carte x^μ.

- Estos 4 numeros determinan el mapa $\omega : T_P \to \mathbb{R}$ por completo, entonces T_P^* tiene 4 dimensiones

- El gradiente $\mathbf{d}f$ tiene componentes $\mathbf{d}f[\partial_\mu] = \partial_\mu f$

(1) $\mathbf{d}x^\mu[\partial_\nu] = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$

Los $\mathbf{d}x^\mu$ conforman la base de coordenadas de T_P^*. La relación (1) implica que es la bese dual a los ∂_μ.

- Para cada covector ω, $\omega = \sum_{\mu=0}^{3} \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu$. Dem: Para cada $\frac{d}{d\eta} \in T_P$

$$\omega[\frac{d}{d\eta}] = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{dx^\mu}{d\eta} \omega[\partial_\mu] = \sum_{\mu=0}^{3} \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu[\frac{d}{d\eta}] \qquad \blacksquare$$

Así, cualquier covector se puede escribir como una suma de gradientes con coeficientes escalares.

- Nota que se puede expander vectores y covectores en bases que no son los bases ∂_μ y $\mathbf{d}x^\mu$ asociadas a las coordenadas: Se $e_{(\eta)}$ es una base de T_P (vectores tangentes en P) podemos definir una base dual $\omega^{(\eta)}$ de T_P^* (covectores)

$$\omega^{(\eta)}(e_{(\xi)}) = \delta^\eta_\xi \quad \longleftarrow \text{base dual}$$

- si $e_{(\eta)} = e^\mu_{(\eta)} \partial_\mu$ entonces $\omega^{(\eta)} = \omega^{(\eta)}_\mu dx^\mu$ con $\omega^{(\eta)}_\mu e^\mu_{(\xi)} = \delta^\eta_\xi \Rightarrow \omega^{(\eta)}_\mu$ es matriz inversa de $e^\mu_{(\eta)}$

- $v = v^\eta e_{(\eta)} \quad v^\eta = \omega^{(\eta)}[v]$

- $\alpha = \alpha_\eta \omega^{(\eta)} \quad \alpha_\eta = \alpha[e_{(\eta)}]$

$e^\mu_{(\eta)}$ invertible porque $e_{(\eta)}$ son l.i.

Derivada covariante de covectores.

$D_v \omega$ = covector cuyos componentes en carta inercial local z^α_P son derivadas de ω_α:

$$[D_v \omega]_\alpha = d_v[\omega_\alpha].$$

A partir de esto es fácil deducir $D_\sigma \omega_\nu = d_\sigma \omega_\nu - \Gamma^\sigma_{\sigma\nu}\, \omega_\sigma$, y por lo tanto

$$D_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\, \omega_\sigma \qquad \leftarrow \text{Hartle eq (20.67)}$$

- nota que Γ entra con un signo menos en lugar del signo más para un vector
- además es el índice arriba de Γ que se contrae con ω.

En lugar de hacer la transformación de la carta z_p^α a x^μ explícitamente para obtener esto vamos usar la regla de productos de Leibniz para la derivada covariante:

· Tomamos la derivada covariante del escalar $\omega[u]$. En una carta inercial local z_p^α

$$D_\sigma[\omega[u]] = d_\sigma[\omega_\alpha u^\alpha] = d_\sigma[\omega_\alpha]\, u^\alpha + \omega_\alpha\, d_\sigma[u^\alpha]$$

$$= [D_\sigma \omega]_\alpha\, u^\alpha + \omega_\alpha [D_\sigma u]^\alpha \qquad \leftarrow \text{def}^n \text{ de } D_\sigma$$

$$= [D_\sigma \omega]_\mu\, u^\mu + \omega_\mu [D_\sigma u]^\mu$$

– La derivada covariante hereda la regla de productos de Leibniz de la derivada común de componentes en z_p^α.

· Pero porque $\omega[u]$ es escalar

$\therefore$

$$D_\sigma(\omega[u]) = d_\sigma(\omega[u]) = d_\sigma[\omega_\mu u^\mu] = d_\sigma[\omega_\mu]\, u^\mu + \omega_\mu\, d_\sigma u^\mu$$

$$\Rightarrow d_\sigma[\omega_\mu]\, u^\mu + \cancel{\omega_\mu d_\sigma[u^\mu]} = [D_\sigma \omega]_\mu\, u^\mu + \cancel{\omega_\mu d_\sigma[u^\mu]} + \omega_\sigma \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} u^\mu$$

$$\Rightarrow [D_\sigma \omega]_\mu\, u^\mu = (d_\sigma[\omega_\mu] - \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\, \omega_\sigma)\, u^\mu \qquad \forall\, u^\mu$$

$$\Rightarrow [D_\sigma \omega]_\mu = d_\sigma[\omega_\mu] - \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\, \omega_\sigma$$

Transporte paralelo

Un covector α es transportado paralelamente por una curva γ si $D_\sigma \alpha = 0$ a lo largo de la curva. Si un vector u es también transportado paralelamente entonces, por la regla de producto $d_\sigma(\alpha[u]) = (D_\sigma \alpha)[u] + \alpha[D_\sigma u] = 0$. Es decir, es constante. Entonces, si $e_{(\eta)}$ es una base transportada paralelamente las componentes $\alpha_\eta = \alpha[e_{(\eta)}]$ son constantes a lo largo de γ.

· Como consecuencia, si $e_{(\eta)}$ es una base transportada paralelamente por γ, la base dual $\omega^{(\eta)}$, definida por $\omega^{(\eta)}[e_{(\xi)}] = \delta^{\eta}_{\ \xi}$, tambien es transportada paralelamente.

· La derivada covariante de un covector se puede escribir en terminos de la derivada comun de sus componentes en una base de covectores $\omega^{(\eta)}$ transportado paralelamente

$$[D_v \alpha]_\eta = d_v[\alpha_\eta]$$

Dem 1: $\alpha_\eta = \alpha[e_{(\eta)}]$ es un escalar, donde $e_{(\eta)}$ es la base de vectores dual a $\omega^{(\eta)}$

$$d_v[\alpha_\eta] = D_v\,\alpha[e_{(\eta)}] = (D_v\alpha)[e_{(\eta)}] + \alpha[\overset{=0}{D_v e_{(\eta)}}] \quad \text{— regla de producto}$$

$$= [D_v\alpha]_\eta$$

Dem 2: $$D_v\alpha = D_v[\alpha_\eta\,\omega^{(\eta)}] = d_v[\alpha_\eta]\,\omega^{(\eta)} + \alpha_\eta\,\overset{=0}{D_v\omega^{(\eta)}} \quad \text{— regla de producto}$$

α_η es escalar

$$\Rightarrow [D_v\alpha]_\eta = d_v[\alpha_\eta]$$

Tensores y sus derivadas covariantes   Hartle 20.3

Tensores son mapas multilineales de vectores y covectores a $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Mas precisamente, un tensor tipo $\left[{m \atop n}\right]$ es una funcion valorado en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) lineal en cada uno de sus argumentos, siendo estos m covectores y n vectores.

- un covector es un tensor tipo $\left[{0 \atop 1}\right]$
- un vector es un tensor tipo $\left[{1 \atop 0}\right]$
- un escalar " " " " $\left[{0 \atop 0}\right]$

· Los componentes $D_\mu\alpha_\nu$ definen un tensor tipo $\left[{0 \atop 2}\right]$:

$$B(u,v) = u^\mu v^\nu D_\mu\alpha_\nu = (D_u\alpha)[v]$$

· Escribimos $T_P{}^m_n$ para el espacio de tensores tipo $\left[{m \atop n}\right]$ en el punto P

· Una base cualquiera $e_{(\eta)}$ de T_P, y su dual $\omega^{(\eta)}$ define componentes de tensores

$$B^{\eta_1\cdots\eta_m}{}_{\xi_1\cdots\xi_n} = B[\omega^{(\eta_1)},\dots,\omega^{(\eta_m)}, e_{(\xi_1)},\dots,e_{(\xi_n)}]$$

- en $T_P{}^m_n$ hay m indices arriba y n abajo.

· En una carta x^μ los componentes son

$$B^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} = B[dx^{\mu_1},\ldots,dx^{\mu_m},\partial_{\nu_1},\ldots,\partial_{\nu_n}]$$

· Bajo cambio de carta $x^\mu \to y^\rho$ las bases asociadas cambia a

$$dy^\rho = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}dx^\mu \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y^\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho}\partial_\mu$$

Entonces por (multi) linealidad del tensor los componentes cambian a Hartle eq (20.45)

$$B^{\rho_1\cdots\rho_m}{}_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \frac{\partial y^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial y^{\rho_m}}{\partial x^{\mu_m}}\cdot\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\lambda_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial y^{\lambda_n}}B^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$$

- para cada indice arriba (indice vectorial) hay un factor $\frac{\partial y}{\partial x}$.
- pere cada indice abajo (indice covectorial) hay un factor $\frac{\partial x}{\partial y}$.

  - no hace falta memorizar. Solo hay que acordarse que coordenados siempre tienen los indices arriba (pero ¡ojo! no son componentes de vectores) y solo hay que contraer indices arriba con indices abajo. Así solo hay una manera de hacerlo para que las componentes en la carta y solo tienen indices de coordenadas y.

Derivada covariante Wald 3.1

En coordenadas inerciales locales z_p^α tenemos en P

$$[D_\sigma B]^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} = d_\sigma[B^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_m}]$$

⇒ dado que D_σ siempre se reduce a la derivada común d_σ de los componentes en la carta z_p^α

D_σ hereda la regla de productos de Leibniz para cualquier contración de tensores.

ej. $$D_\sigma[a^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\mu\nu}b^{\mu\nu}{}_{\cdot}]^{\sigma_1\sigma_2}{}_{\rho_1\rho_2} = [D_\sigma a]^{\sigma_1\sigma_2}{}_{\rho_1\mu\nu}b^{\mu\nu}{}_{\rho_2} + a^{\sigma_1\sigma_2}{}_{\rho_1\mu\nu}[D_\sigma b]^{\mu\nu}{}_{\rho_2}$$

La buena notacion para esto es realmente la notacion de indices abstractas que usa Wald. Pero me parecía que ya estabamos lo suficientemente abstractos! Si lo necesitamos mas adelante lo enseñare. Mientras tanto lo pueden encontrar si quieren en Wald 2.4.

En una carta arbitraria x^μ Hartle (20.68), (20.65)

$$D_\sigma B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} = \partial_\sigma [B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots}] + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\sigma} B^{\sigma \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu_1} B^{\mu_1 \cdots}{}_{\sigma \cdots}$$

un $+\Gamma$ para cada índice vectoria) — un $-\Gamma$ para cada índice covectoria)

Hay muchas maneras equivalentes de encontrar este resultado. El conceptualmente mas sencillo es poner la expresión $B^{\alpha_1 \cdots}{}_{\beta_1 \cdots} = \frac{\partial z^{\alpha_1}_{p}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial z^{\beta_1}_p} \cdots B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots}$ en la derivada $\partial_\sigma [B^{\alpha_1 \cdots}{}_{\beta_1 \cdots}]$ y expander.

Otro método es expander la derivada del escalar $B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} = B(dx^{\mu_1}, \ldots, \partial_{\nu_1}, \ldots)$

$$\partial_\sigma [B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots}] = D_\sigma [B^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots}]$$

$$= [D_\sigma B]^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} + B(D_\sigma[dx^{\mu_1}], \ldots, \partial_\nu, \ldots) + \ldots + B(dx^\mu, \ldots, D_\sigma[\partial_\nu], \ldots) + \ldots$$

$$= [D_\sigma B]^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} + D_\sigma [dx^{\mu_1}]_\sigma\, B^{\sigma \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} + \ldots + D_\sigma [\partial_\nu]^\sigma\, B^{\mu_1 \cdots}{}_{\sigma \cdots} + \ldots$$

$$D_\sigma [dx^{\mu_1}]_\sigma = \partial_\sigma [\delta^{\mu_1}_\sigma] - \Gamma^\rho_{\sigma\sigma}\, \delta^{\mu_1}_\rho = -\Gamma^{\mu_1}_{\sigma\sigma} \quad \text{porque } [dx^{\mu_1}]_\sigma = \delta^{\mu_1}_\sigma$$

$$D_\sigma [\partial_\nu]^\sigma = \partial_\sigma \delta^\sigma_\nu + \Gamma^\sigma_{\sigma\rho}\, \delta^\rho_\nu = \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} \quad \text{porque } [\partial_\nu]^\sigma = \delta^\sigma_\nu$$

Esto da el resultado inmediatamente.

- Nota que el gradiente DB de un tensor tipo $\left[{m \atop n}\right]$ es un tensor tipo $\left[{m \atop n+1}\right]$

Curvatura

Vease Wald 3.2 pero ¡ojo! $R_{Wald\,\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = R_{Nuestro}{}^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu}$

Ahora podemos por fin definir a la curvatura:

$$[D_\mu, D_\nu]\, a^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}\, a^\rho \quad \text{para cualquier campo vectorial } a$$

$$[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \quad \text{es el conmutador.}$$

- Para derivadas comunes $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \leftarrow \partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f$. Pero D_μ no es solo una derivada parcial.

- Curiosamente $[D_\mu, D_\nu]\, a^\sigma$, que parece involucrar las segundas derivadas de a, no depende de ninguna derivada de a!

- Vemos como esto sale:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu a^\sigma &= \partial_\mu D_\nu a^\sigma - \Gamma^\eta_{\mu\nu} D_\eta a^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} D_\nu a^\rho \\ &= \partial_\mu \partial_\nu a^\sigma + \partial_\mu [\Gamma^\sigma_{\nu\rho} a^\rho] - \Gamma^\eta_{\mu\nu} D_\eta a^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_\nu a^\rho + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\eta} a^\eta \\ &= [\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\eta} \Gamma^\eta_{\nu\rho}]\, a^\rho + \text{términos que son \underline{simetricos} bajo el intercambio } \mu \leftrightarrow \nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\eta} \Gamma^\eta_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\eta} \Gamma^\eta_{\mu\rho} \qquad \text{Hartle eq. (21.20)}$$

- nota: Porque gradientes covariantes de tensores son tensores la expresion en terminos del conmutador de derivadas covariantes muestra que $R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}$ son componentes de un tensor.

Esto parece una terrible sopa de indices, pero tiene su logica:

Sean $\mathbb{\Gamma}_\mu$ 4 matrices, cada uno con componentes $\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$

Sean $\mathbb{R}_{\mu\nu}$ 6 matrizes (por antisimetría en $\mu\nu$) con componentes $R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}$

Entonces

conmutador de matrices

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbb{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \mathbb{\Gamma}_\mu + [\mathbb{\Gamma}_\mu, \mathbb{\Gamma}_\nu]$$

Este tipo de curvatura se encuentra tambien en teorias Yang-Mills no Abelianos

Ahí la derivada covariante es de la forma

$$D_\mu w^I = \partial_\mu w^I + A_\mu{}^I{}_J w^J$$

donde w es un vector, pero no en el espacio tangente T_p pero en algún otro espacio vectorial, y $A_\mu{}^I{}_J$ da cuenta de la variación en espacio tiempo de la base a que esten referidas las componentes w^I. La curvatura es

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Hasta en electromagnetismo surge. Se define derivadas covariantes (bajo cambios de fase dependientes de posicion en lugar de rotación de bases) de campos clásicos cargados o funciones de onda, de la forma

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iqA_\mu \phi$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{q}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{es el campo EM}$$

$$F_{0i} = E_i \qquad F_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_k \qquad i,j \in \{1,2,3\}$$