Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Runge-Kutta: ¿qué hace la función *ode45* de Octave?

Sea una ecuación diferencial de primer orden, con la condición inicial de que en el instante t_0 el valor inicial de x es x_0

Se elige una anchura de paso h y se calculan cuatro números k_1, k_2, k_3, k_4 de acuerdo con el procedimiento esquematizado en la tabla adjunta. Según el procedimiento ordinario de Runge-Kutta, a partir del valor de x en el instante t se determina el valor de x en el instante $t+h$ mediante la fórmula que figura en la última fila de dicha tabla.

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$
$k_1 = h.f(t,x)$ $k_2 = h.f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k1)$ $k_3 = h.f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k2)$ $k_4 = h.f(t + h, x + k_3)$
$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Definimos la función *rk_1* que resuelve la ecuación diferencial de primer orden, cuando le pasamos:

- la función $f(t,x)$,
- la condición inicial de que en el instante $t_0$el valor inicial es x_0,
- el instante final t_f
- el número de pasos de integración n comprendidos entre el instante inical t_0 y final t_f.

y nos devolverá un vector t y su correspondiente vector x.

```
function [t,x] =rk_1(f,t0,tf,x0,n)
    h=(tf-t0)/n;
    t=t0:h:tf;
    x=zeros(n+1,1); %reserva memoria para n elementos del vector x
    x(1)=x0;
    for i=1:n
        k1=h*f(t(i),x(i));
        k2=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k1/2);
        k3=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k2/2);
        k4=h*f(t(i)+h,x(i)+k3);
        x(i+1)=x(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
     end
end
```

Ejemplo: Resolver por un método de Runge-Kutta de cuarto orden el problema de valor inicial:

$$y' = x^2 - 3y \quad ; \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 0.4$, con $h = 0.1$.

Tenemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, y $f(x, y) = x^2 - 3y$. Para $x_1 = 0.1$ l ordenada correspondiente será:

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

con

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 0^2 - 3\,1 = -3$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_1) = (0 + \frac{0.1}{2})^2 - 3(1 + \frac{0.1}{2}(-3)) = -2.5475$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_2) = (0 + \frac{0.1}{2})^2 - 3(1 + \frac{0.1}{2}(-2.5475)) = -2.61538$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h\,k_3) = (0 + 0.1)^2 - 3(1 + 0.1(-2.61538)) = -2.20539$$

y así:

$$y_1 = 0.741148$$

De manera análoga se determinan los puntos:

$$(x_2, y_2) = (0.2, 0.551151) \quad ; \qquad (x_3, y_3) = (0.3, 0.413894) \quad ; \qquad (x_4, y_4) = (0.4, 0.317435)$$

La solución exacta es:

$$y = \frac{25}{27}e^{-3x} + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)$$

de manera que:

$$y(0.1) = 0.741127 \quad ; \qquad y(0.2) = 0.551121 \quad ; \qquad y(0.3) = 0.413860 \quad ; \qquad y(0.4) = 0.317402$$