CTE II: Errores, Propagación de Errores y Gráficos log-log, semi-log

Cecilia Mateu

Instituto de Física, Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Clase de hoy

- Promedio y desviación estándar
- Error de la Media
- Gaussiana: 1-sigma -> 68.3% de probabilidad
- Exactitud y Precisión
- **Propagación de errores**
- Cifras significativas y redondeo (leer)
- **Gráficos log-log y semi-log**

Promedio y Desviación Estándar

- Promedio o media aritmética de N medidas:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

- Desviación estándar: desviación cuadrática media (respecto al promedio)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

- si tenemos una serie de N medidas x_i de una cierta cantidad, la desviación estándar es un buen estimado del error aleatorio de cada medida. Así conviene reportar cada medida x_i tomando σ como su error individual:

$$x_i \pm \sigma$$

Promedio y Desviación Estándar

- Si tenemos una serie de N medidas x_i de una cierta cantidad x:

  - La desviación estándar es un buen estimado del error aleatorio de *cada medida*. Así conviene reportar cada medida x_i tomando σ como su error individual:

$$x_i \pm \sigma$$

  - El promedio se puede tomar como un buen estimador de la cantidad x

  - ¿Cuál es el error asociado al promedio? Claramente debe ser mejor (menor) que el de las medidas individuales.

  - Se puede demostrar que el **error del promedio de N medidas** está dado por:

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

An introduction to error analysis, John R.Taylor (University Science Books, 1997)

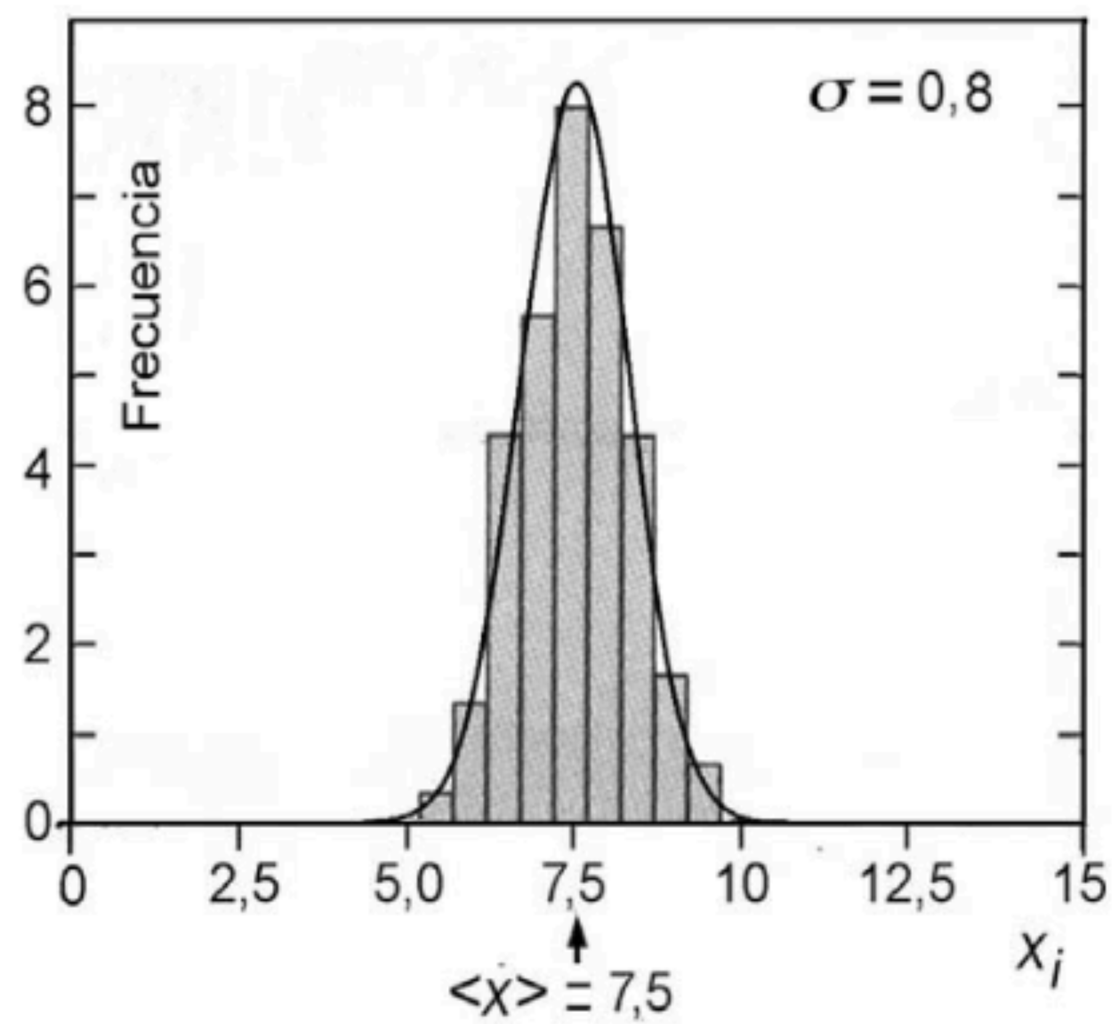
Distribución Gaussiana

- En muchos procesos físicos los errores tienen una distribución *Gaussiana, i.e.* la frecuencia con la que se repite una cierta medida x tiene una distribución de probabilidad dada por:

Media

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

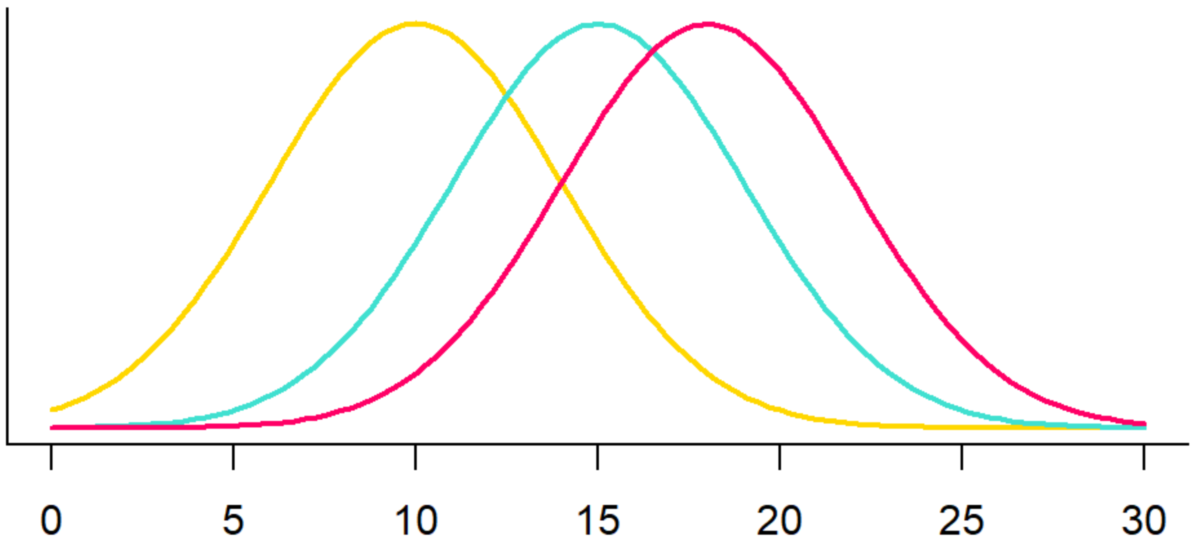
Desviación Estándar



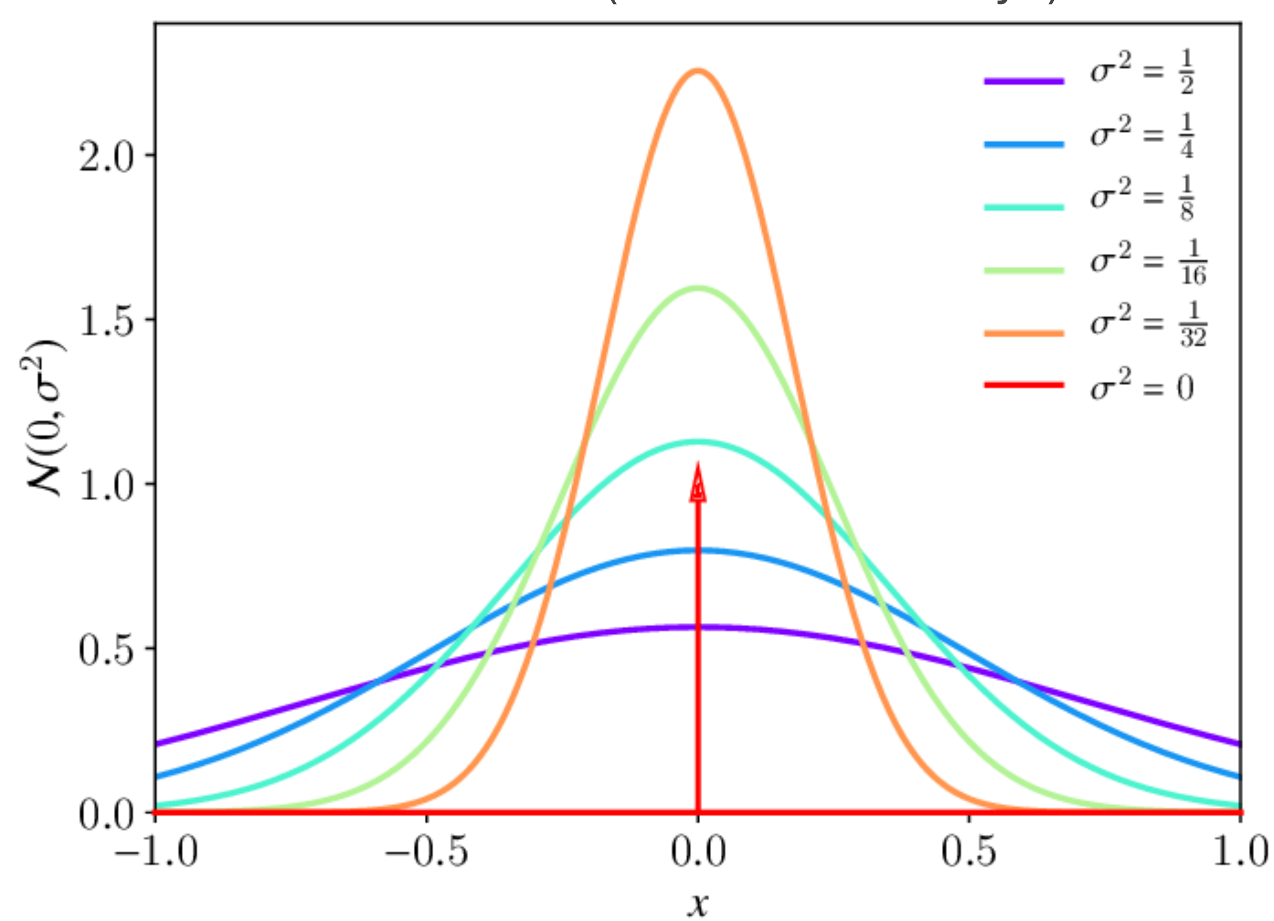
Distribución Gaussiana

- **Diferente media** (con σ fijo)

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



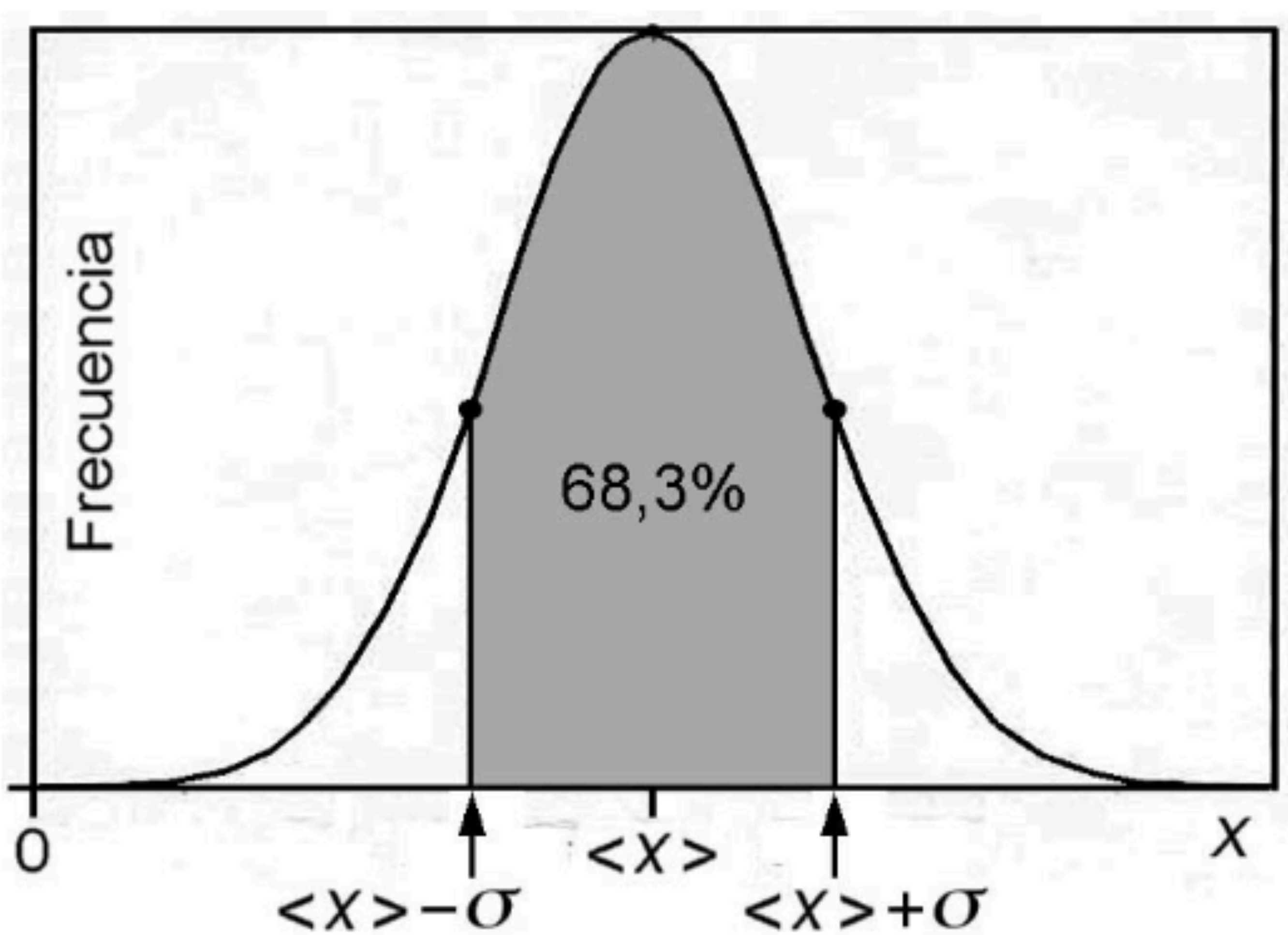
- **Diferente σ** (con media fija)

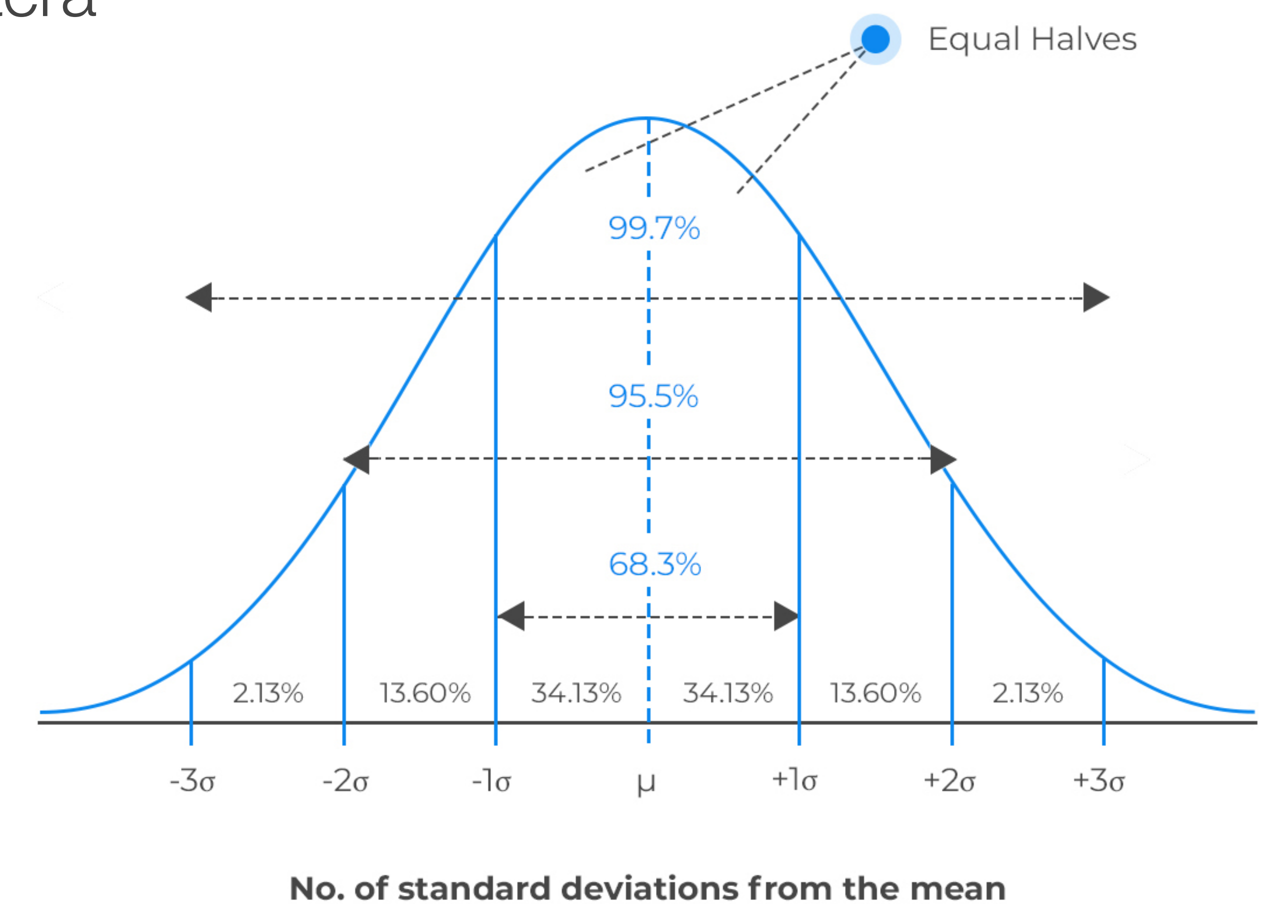


Distribución Gaussiana

- En el intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ está contenido el 68.3% del área de la Gaussiana:
  - Cuando la distribución de medidas es Gaussiana, el 68.3% de las medidas caerá dentro de $\bar{x} \pm \sigma$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

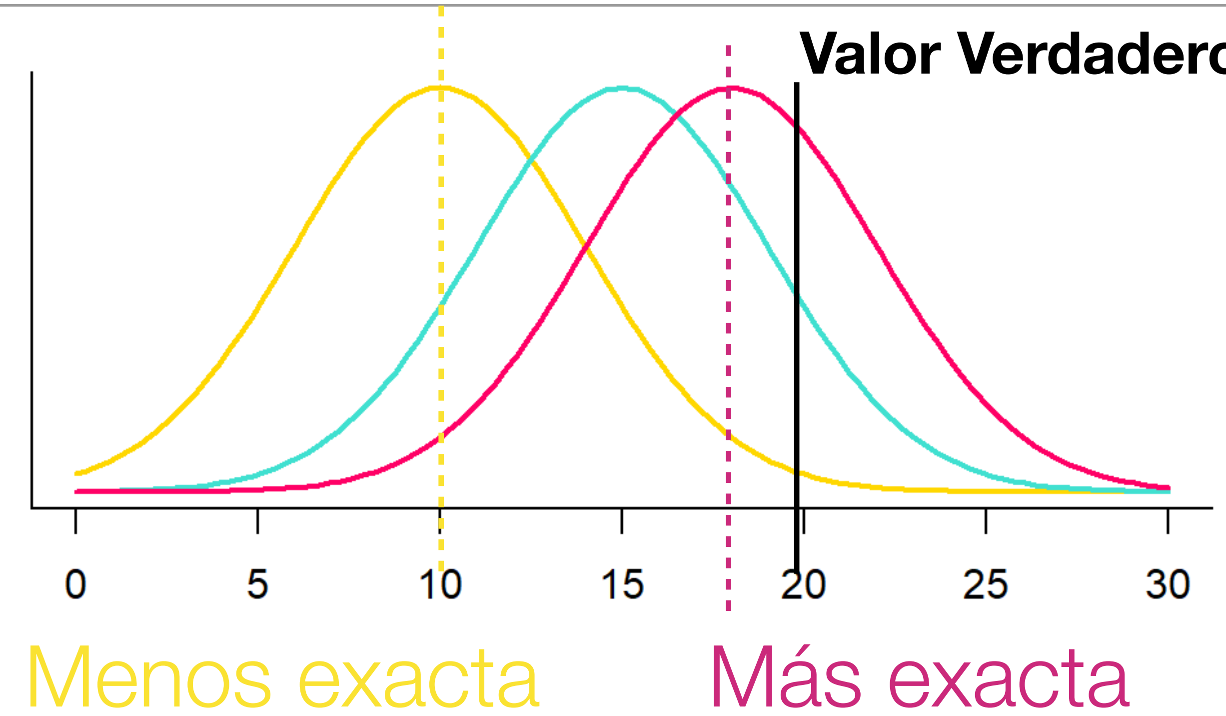




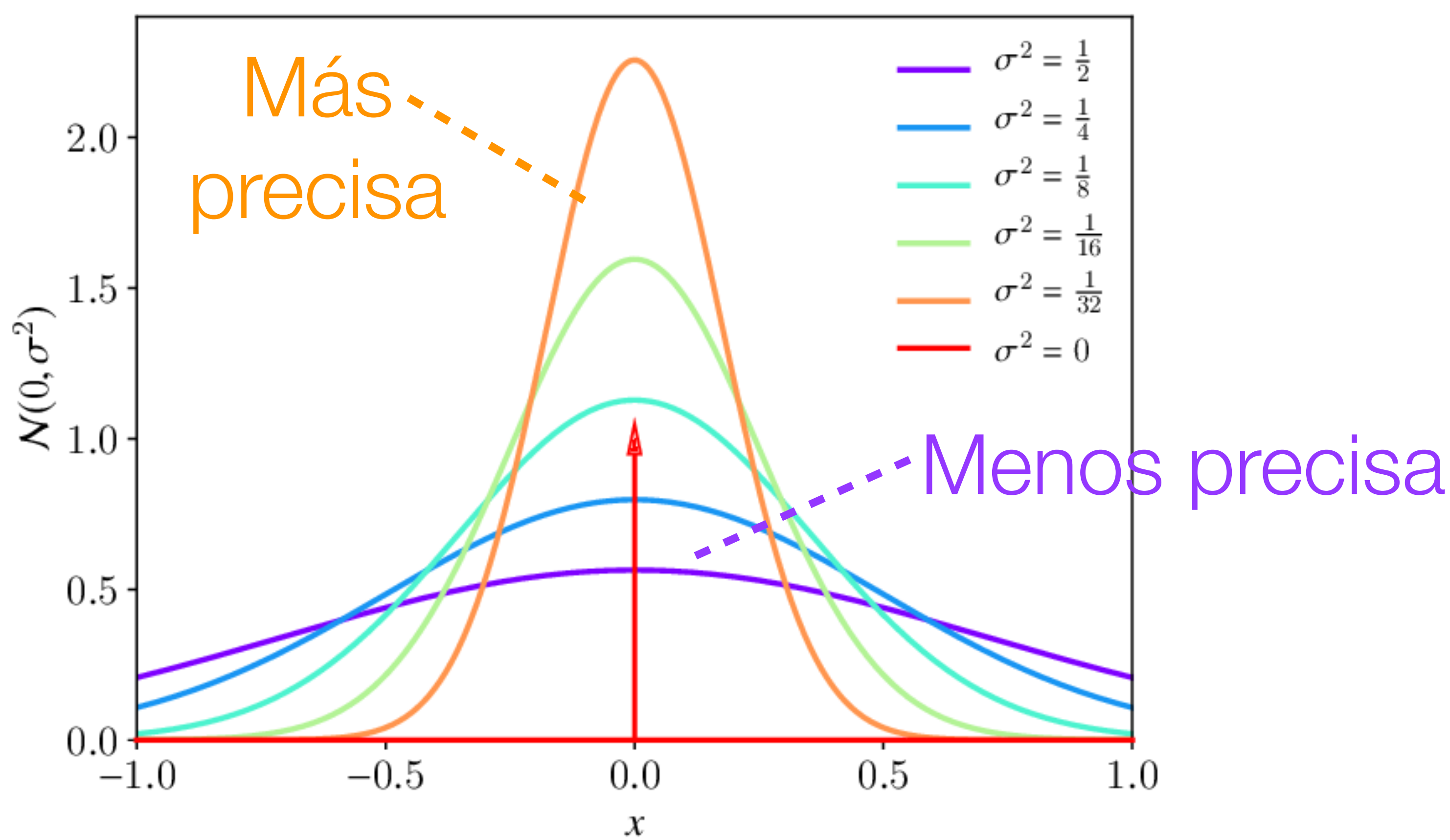
- Similarmente: hay un área de 95.5% dentro de $\bar{x} \pm 2\sigma$ y 99.7% dentro de $\bar{x} \pm 3\sigma$

Exactitud y Precisión

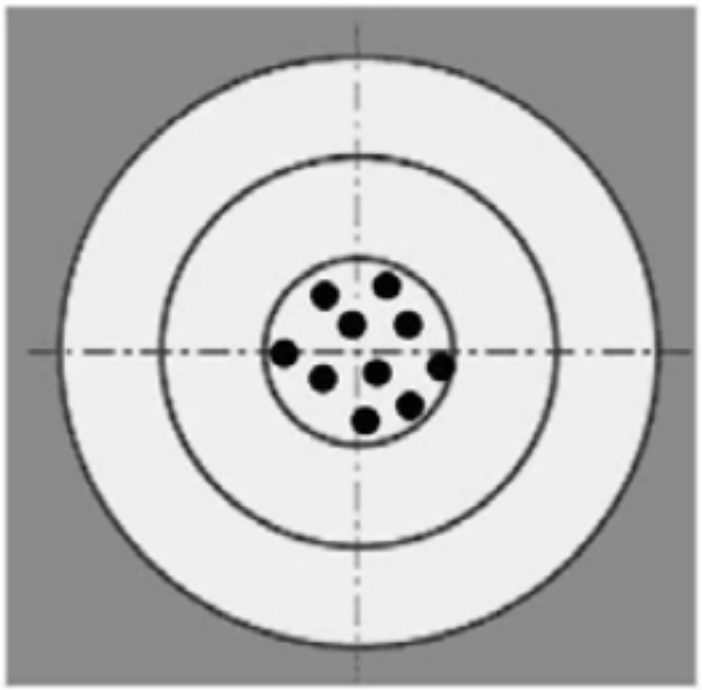
- **Exactitud**: Una medida es más exacta (o certera) cuando más cercana esté del valor verdadero que se quiere medir
    - Los errores *sistemáticos* afectan la *exactitud*. Suelen estar asociados a sesgos o a problemas de calibración



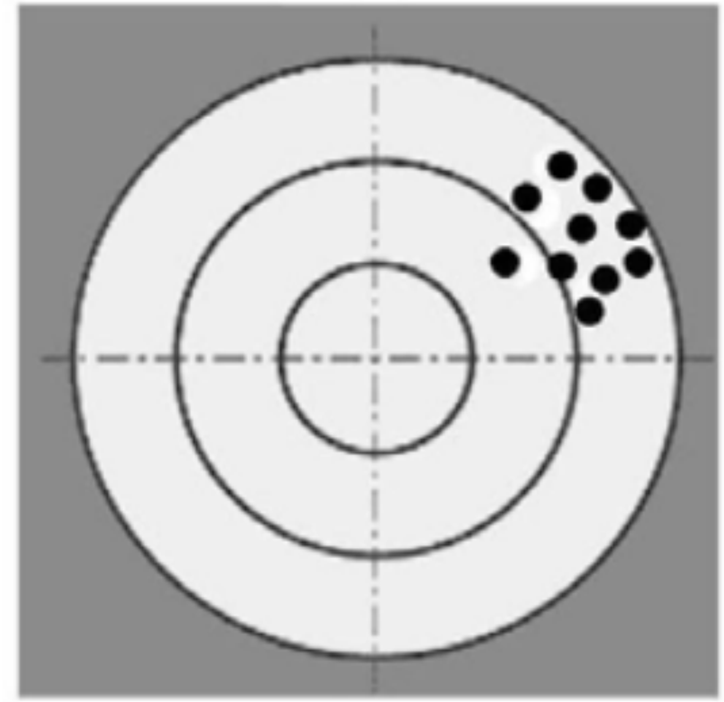
- **Precisión**: Un conjunto de medidas es más preciso cuanto menor sea su dispersión
    - Los errores *aleatorios* afectan la *precisión*
    - Cuanto mayor es la precisión más *reproducible* es la medida. Suelen estar asociados al error instrumental

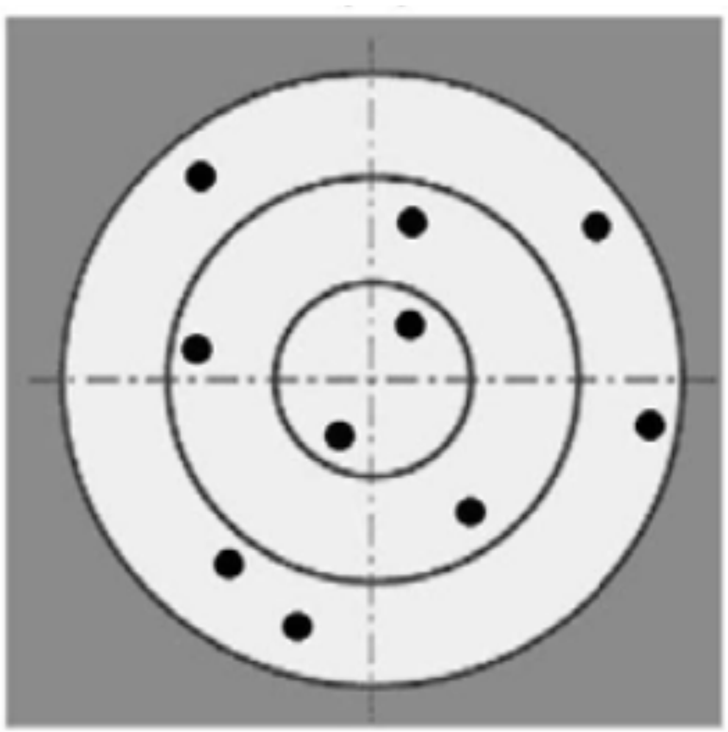


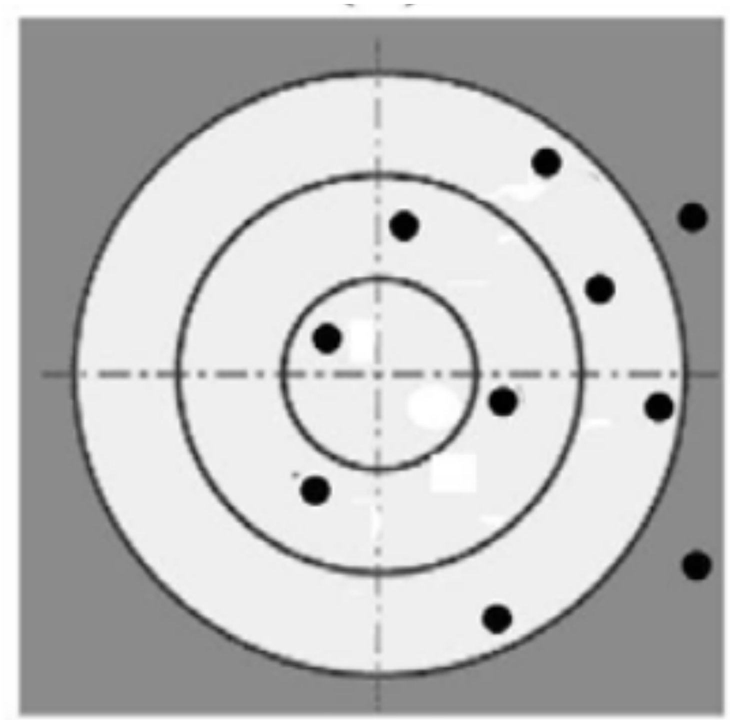
Astrophysics

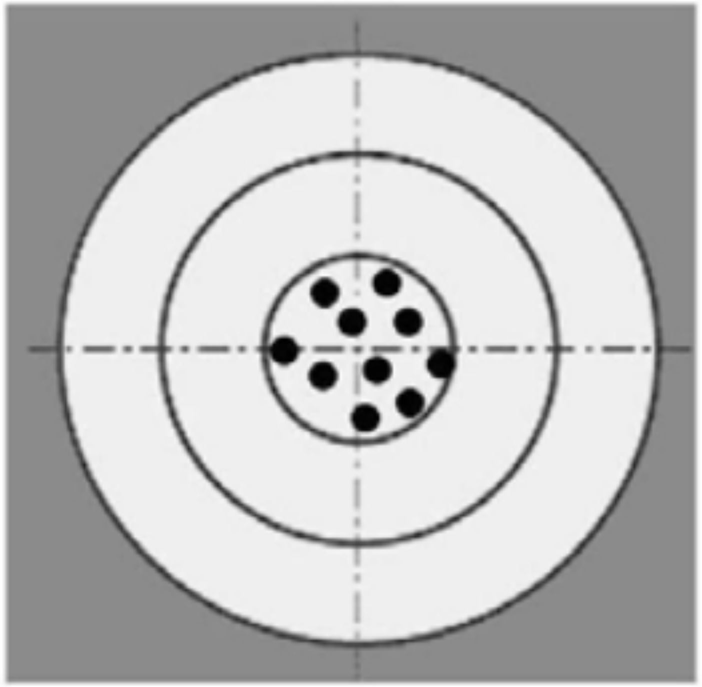


Buena Exactitud
Buena Precisión

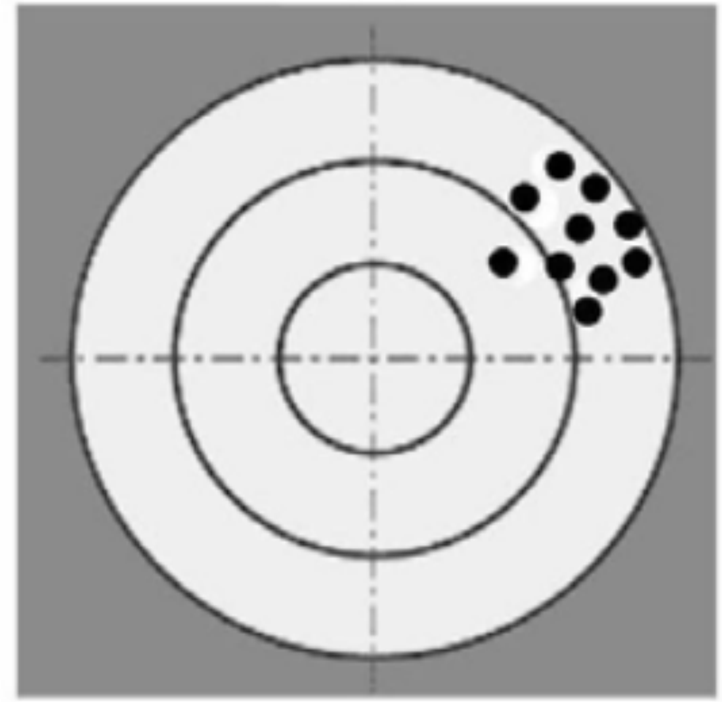




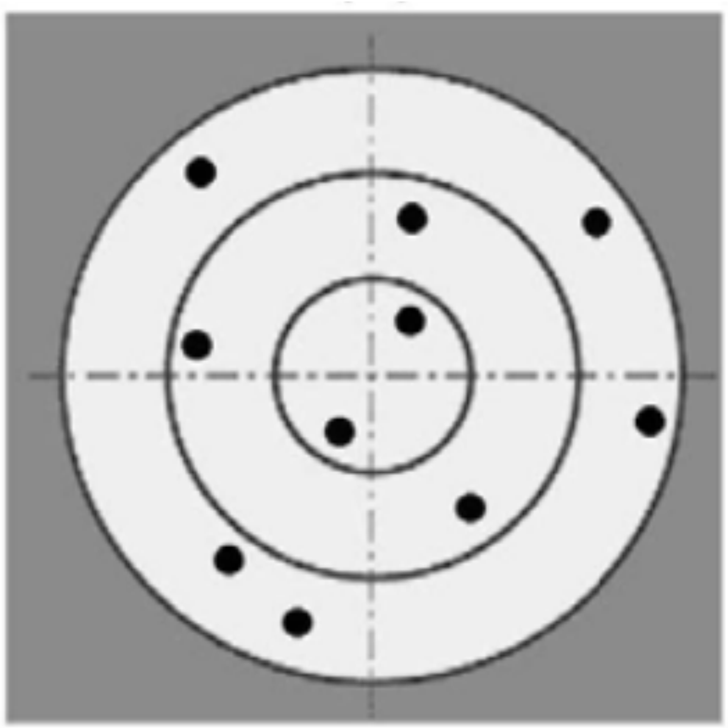




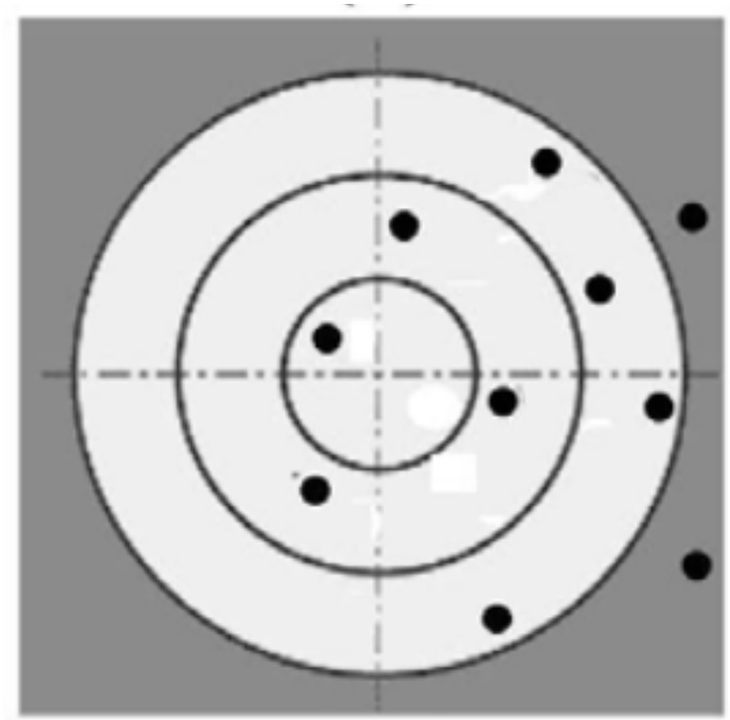
Buena Exactitud
Buena Precisión



Mala Exactitud
Buena Precisión



Buena Exactitud
Mala Precisión



Mala Exactitud
Mala Precisión

Propagación de errores

- Muchas veces la cantidad de interés físico no es directamente observable o medible, sino que debe ser calculada a partir de una (o más) que sí lo sea
- Ejemplos:
  - Paralaje —> Distancia
  - magnitud aparente y paralaje —> luminosidad
  - magnitud aparente —> Distancia

- Se puede demostrar el error Δz de $z = f(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ está dado en términos de los $y_1 \ldots y_N$ y sus errores $\Delta y_1 \ldots \Delta y_N$ como:

$$(\Delta z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_N}\Delta y_N\right)^2$$

- O de forma resumida: $(\Delta z)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\Delta y_i\right)^2$

Propagación de errores

$$z = f(y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

- Notar que esa ecuación se parece a la del diferencial total de una función

$$df = \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}dy_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_N}dy_N$$

- pero cada término está elevado al cuadrado, esto se llama suma en cuadratura y estamos suponiendo que $dy \rightarrow \Delta y$

$$(\Delta z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_N}\Delta y_N\right)^2$$

- Notar que, como los términos se suman en cuadratura, el error de z siempre siempre siempre será mayor que c/u de los errores individuales Δy_i $--$> tiene sentido, los errores se van acumulando (propagando), no pueden disminuir

- Nota: la expresión de la suma en cuadratura es válida únicamente cuando las medidas son independientes y tienen una distribución de error Gaussiana

Propagación de Errores: Ejemplos

- Para una estrella la misión Gaia mide un paralaje de $\varpi = (0.84 \pm 0.22)\mathrm{mas}$ (mas= mili-segundos de arco = 10^{-3} segundos de arco)

$$D = \frac{D_{Tierra-Sol}}{\varpi}$$

$$D(pc) = \frac{1}{\varpi('')}$$

- Parsec:
  - distancia a la cual un objeto tiene un paralaje de 1”
  - distancia a la cual 1 UA subtiende un ángulo de 1”

1pc — 1”

D — ϖ

(regla de tres)

$$\boxed{D = \frac{A}{\varpi} \qquad A = 1\mathrm{pc}''}$$

- Calculemos la distancia y su error…

Propagación de Errores: Ejemplos

- Para una estrella la misión Gaia mide un paralaje de $\varpi = (0.84 \pm 0.22)\text{mas}$ (mas= mili-segundos de arco = 10^{-3} segundos de arco)

$$\boxed{D = \frac{A}{\varpi}\ , \quad A = 1\text{pc}''}$$

- Calculemos la distancia primero:

$$D(pc) = \frac{1pc''}{0.84'' \times 10^{-3}} = 1190.47\text{pc}$$

- Ahora hagamos la propagación de errores:

$$z = f(y_1, y_2, \ldots, y_N) \qquad (\Delta z)^{\cancel{2}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^{\cancel{2}} .$$

$$\Delta D = \left|\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\frac{A}{\varpi}\right)\right|\Delta\varpi = \left|-\frac{A}{\varpi^2}\right|\Delta\varpi = \frac{A}{\varpi^2}\Delta\varpi$$

Propagación de Errores: Ejemplos

- Para una estrella la misión Gaia mide un paralaje de $\varpi = (0.84 \pm 0.22)\mathrm{mas}$ (mas= mili-segundos de arco = 10^{-3} segundos de arco)
- Calculemos la distancia primero:

$$\boxed{D = \frac{A}{\varpi}\,, \quad A = 1\mathrm{pc}''}$$

$$D(pc) = \frac{1pc''}{0.84'' \times 10^{-3}} = 1190.47\mathrm{pc}$$

$$\Delta D = \frac{A}{\varpi^2}\Delta\varpi = \frac{1pc''}{(0.84'' \times 10^{-3})^2} 0.22'' \times 10^{-3} = 311\mathrm{pc}$$

$$\boxed{D = (1190 \pm 310)\,\mathrm{pc}}$$

Ver notas sobre Cifras Significativas y Redondeo

(va para el parcial)

Propagación de Errores: Ejemplos

- ¿A qué error relativo corresponde? $D = (1190 \pm 310)\,\mathrm{pc}$

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta D}{D} \qquad \varepsilon_D = \frac{310\,pc}{1190\,pc}$$

$$\boxed{\varepsilon_D = 0.26}$$

O lo que es lo mismo, un error porcentual del 26%

- Volvamos un momento a la ecuación que habíamos obtenido para ΔD

$$\Delta D = \frac{A}{\varpi^2}\Delta\varpi$$

reescribamos:

$$\Delta D = \frac{A}{\varpi}\frac{\Delta\varpi}{\varpi} = D\frac{\Delta\varpi}{\varpi}$$

Así que:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta\varpi}{\varpi}$$

$$\boxed{\varepsilon_D = \varepsilon_\varpi}$$

El error relativo en paralaje es = al error relativo en Distancia

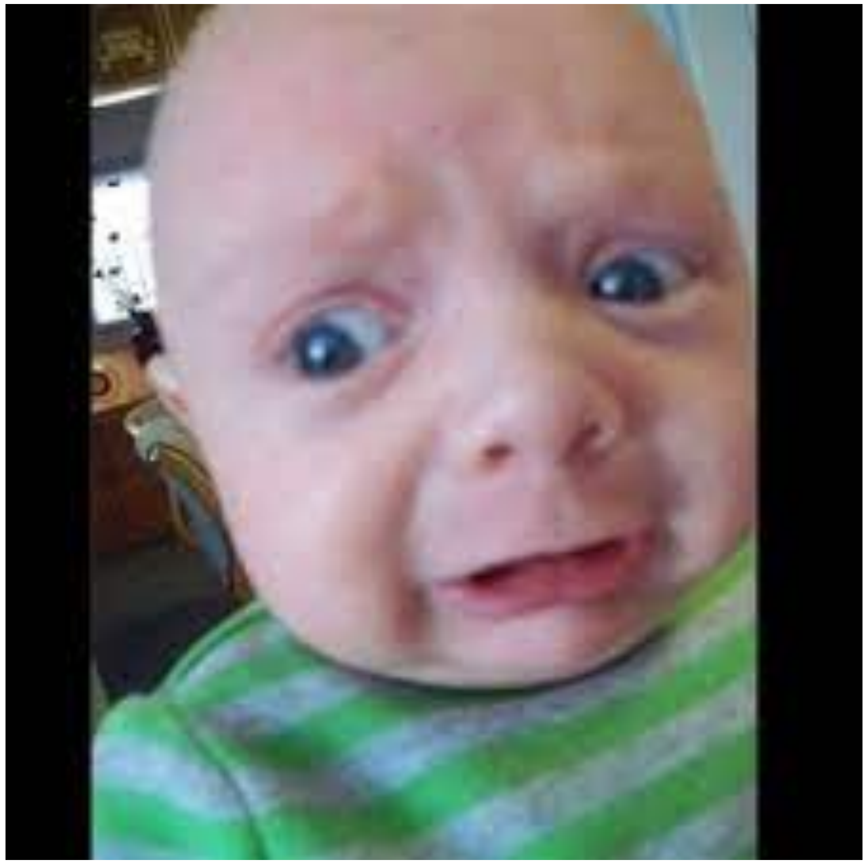
Propagación de Errores: Ejemplos

- Pongamos un caso genérico en el que usted hace un ajuste lineal por mínimos cuadrados y obtiene lo siguiente $y = mx + b$ donde la pendiente $m \pm \Delta m$ y el punto de corte $b \pm \Delta b$ tienen cada uno su error respectivo

- Supongamos que yo quiero saber, para un valor $x \pm \Delta x$ medido, qué valor espero obtener para y, incluyendo su error:

$$(\Delta y)^2 = \left| \frac{\partial y}{\partial m} \right|^2 \Delta m^2 + \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 \Delta x^2 + \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right|^2 \Delta b^2$$

Gráficos Logarítmicos



Queremos pasar de esto…

a esto…

Gráficos log-log

- Muchos fenómenos en física (y en astrofísica) involucran relaciones no lineales entre las variables. Puede ser conveniente graficar en **escala logarítmica** para poder ver todos los datos a la vez

- Cuando además las variables tienen valores que cubren varios órdenes de magnitud (tooooodo el tiempo pasa en astrofísica), es conveniente graficar en **escala logarítmica** para poder ver todos los datos a la vez

- Tomemos un ejemplo conocido…

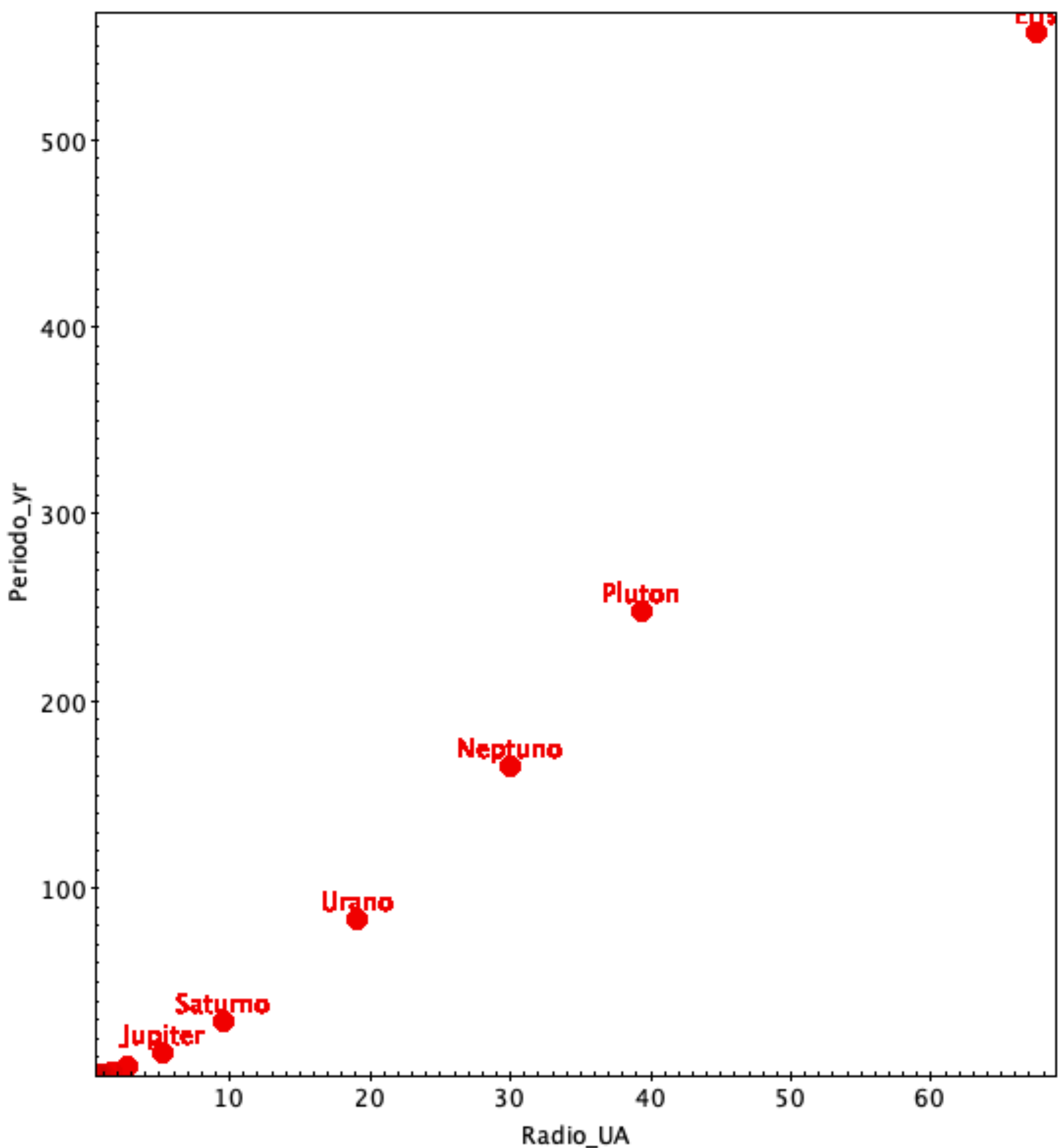
3º Ley de Kepler: Cuadrado del Período proporcional al cubo del semiejemayor

$$P^2 = Ca^3$$

donde $C = 1 yr^2/UA^3$

Gráficos log-log

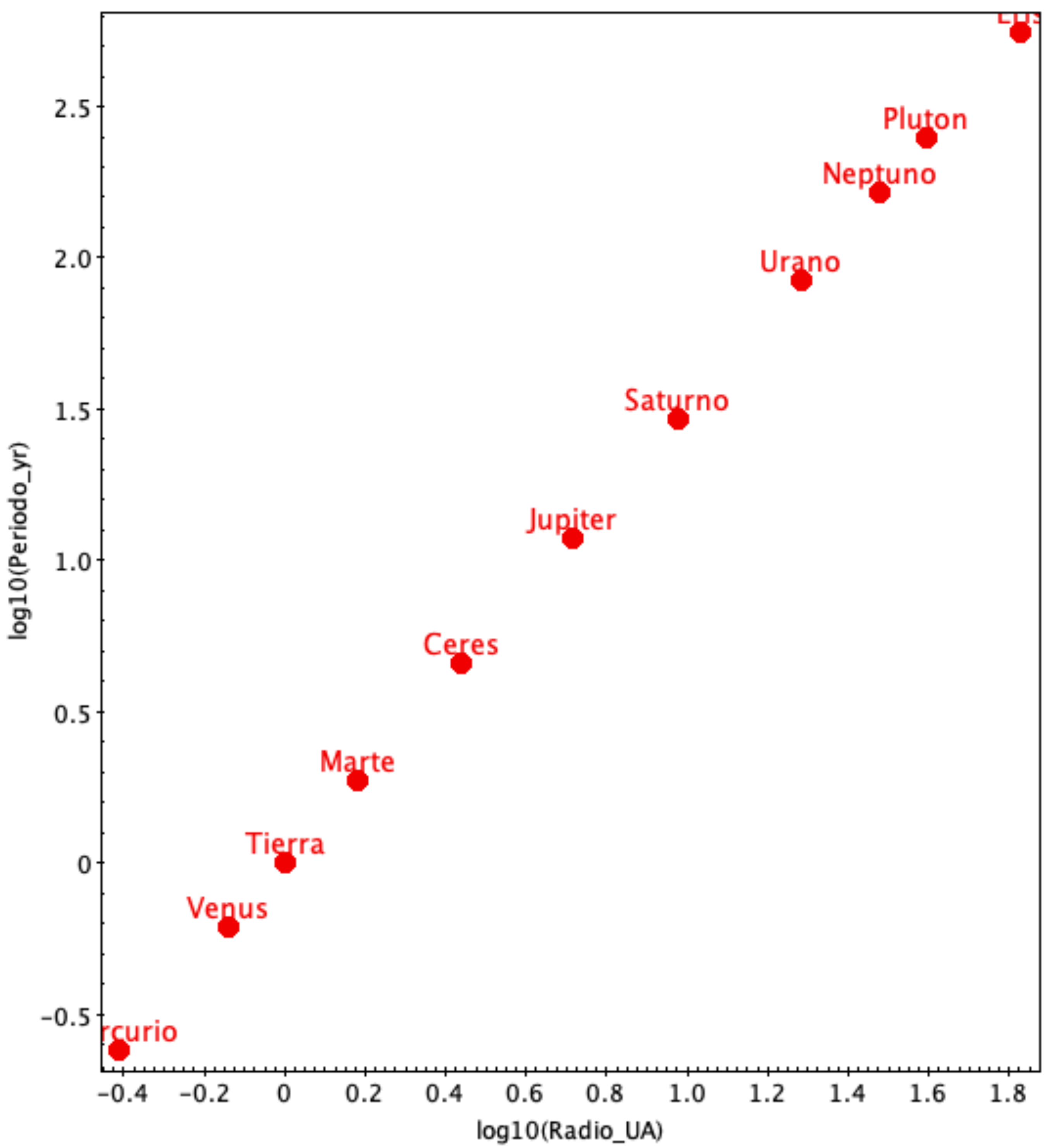
donde $C = 1 yr^2/UA^3$



$$P^2 = Ca^3$$

¿Qué pasa si graficamos logP versus log*a*?

Gráficos log-log



$$P^2 = Ca^3$$

¿Qué pasa si graficamos logP versus log*a*?

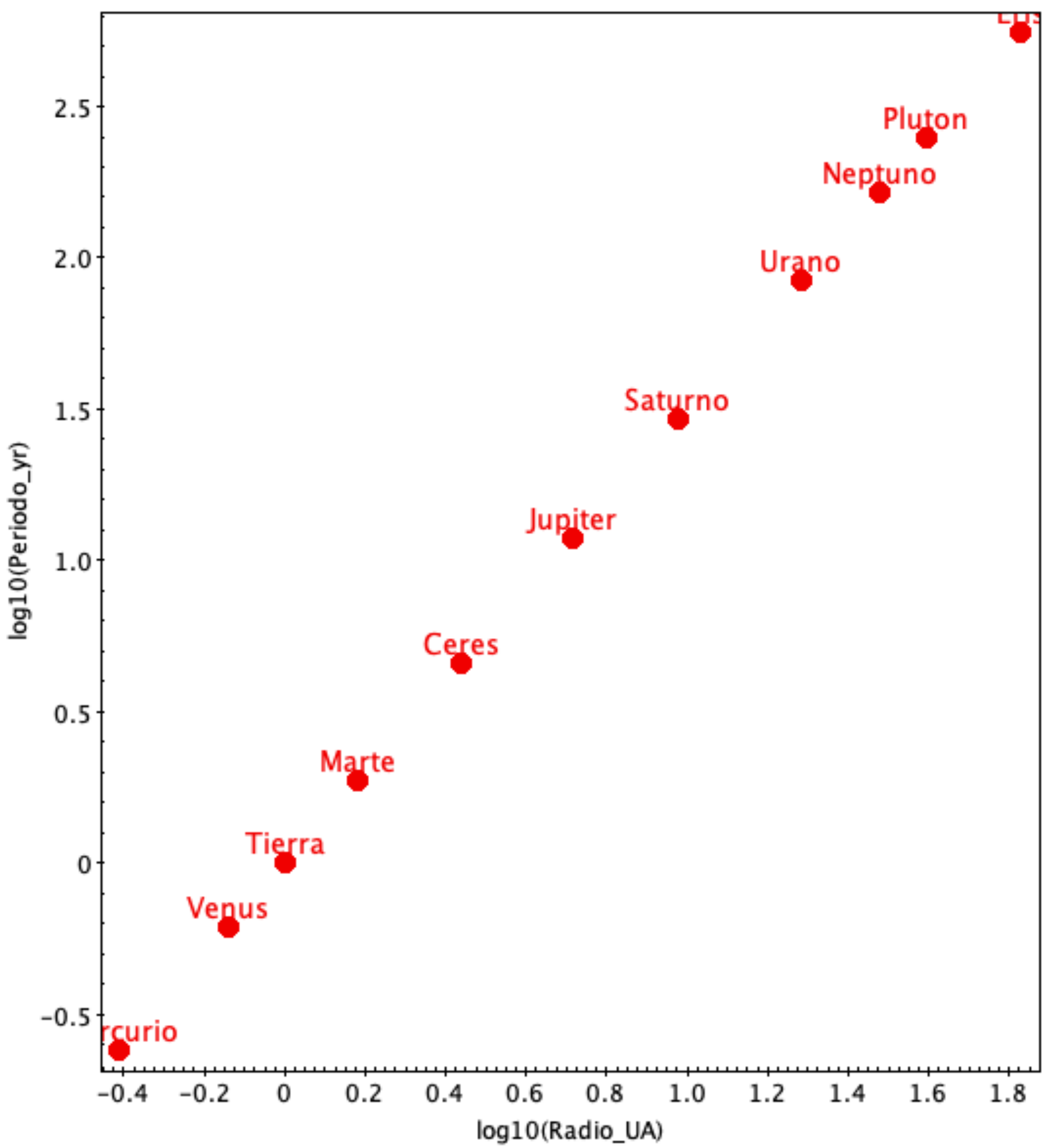
$$\log P^2 = \log(Ca^3)$$

$$\log P^2 = \log C + \log a^3$$

$$2 \log P = \cancel{\log C} + 3 \log a$$

$$\boxed{\log P = +\frac{3}{2} \log a}$$

Gráficos log-log



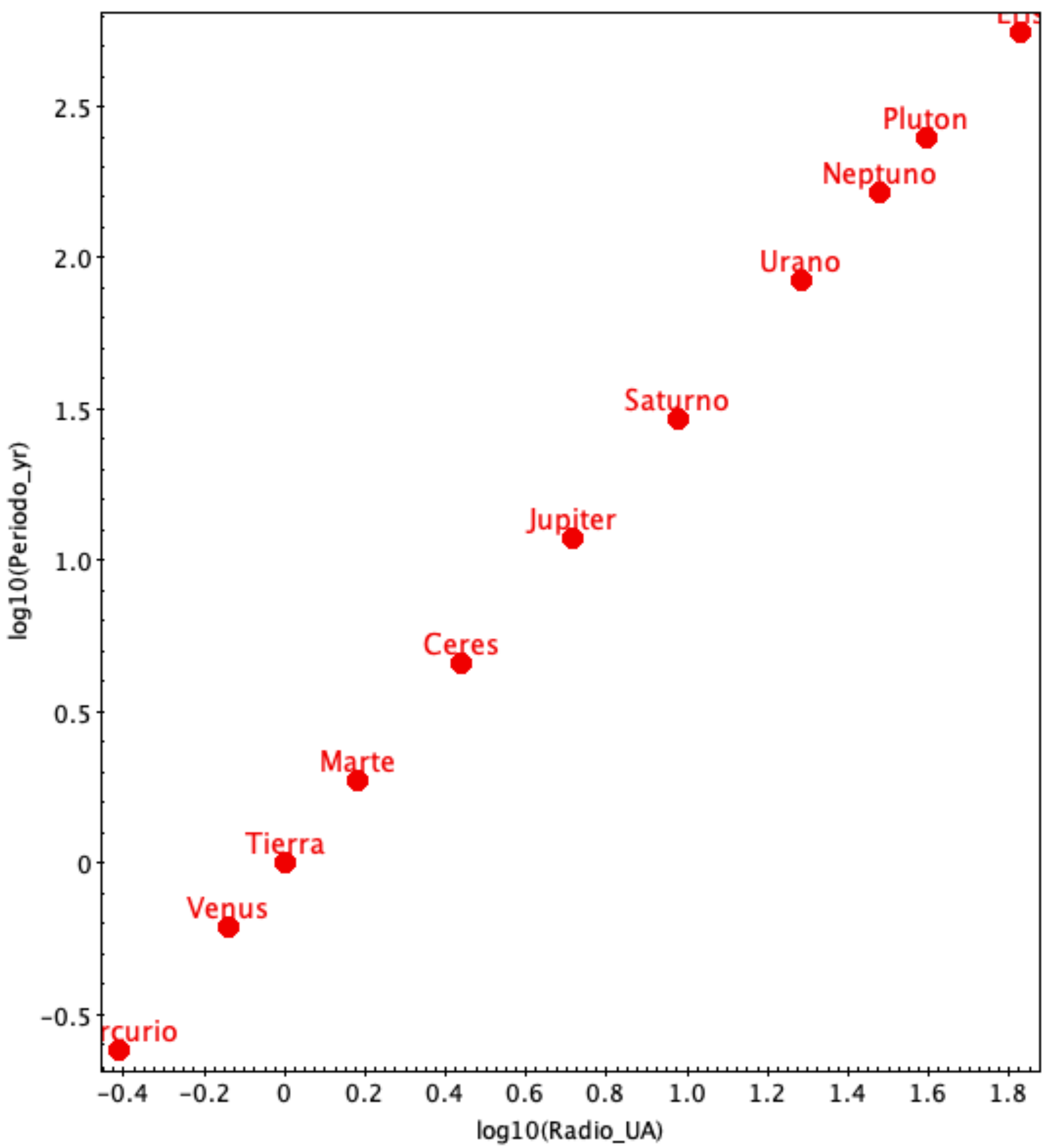
$$P^2 = Ca^3$$

¿Qué pasa si graficamos logP versus log*a*?

$$\boxed{\log P = +\frac{3}{2}\log a}$$

Esta relación es lineal

Gráficos log-log



$$P^2 = Ca^3$$

¿Qué pasa si graficamos logP versus log*a*?

$$\boxed{\log P = +\frac{3}{2}\log a}$$

Esta relación es lineal

Gráficos log-log

$$\log P = +\frac{3}{2}\log a$$

Grafico en escala lineal
del log de las variables

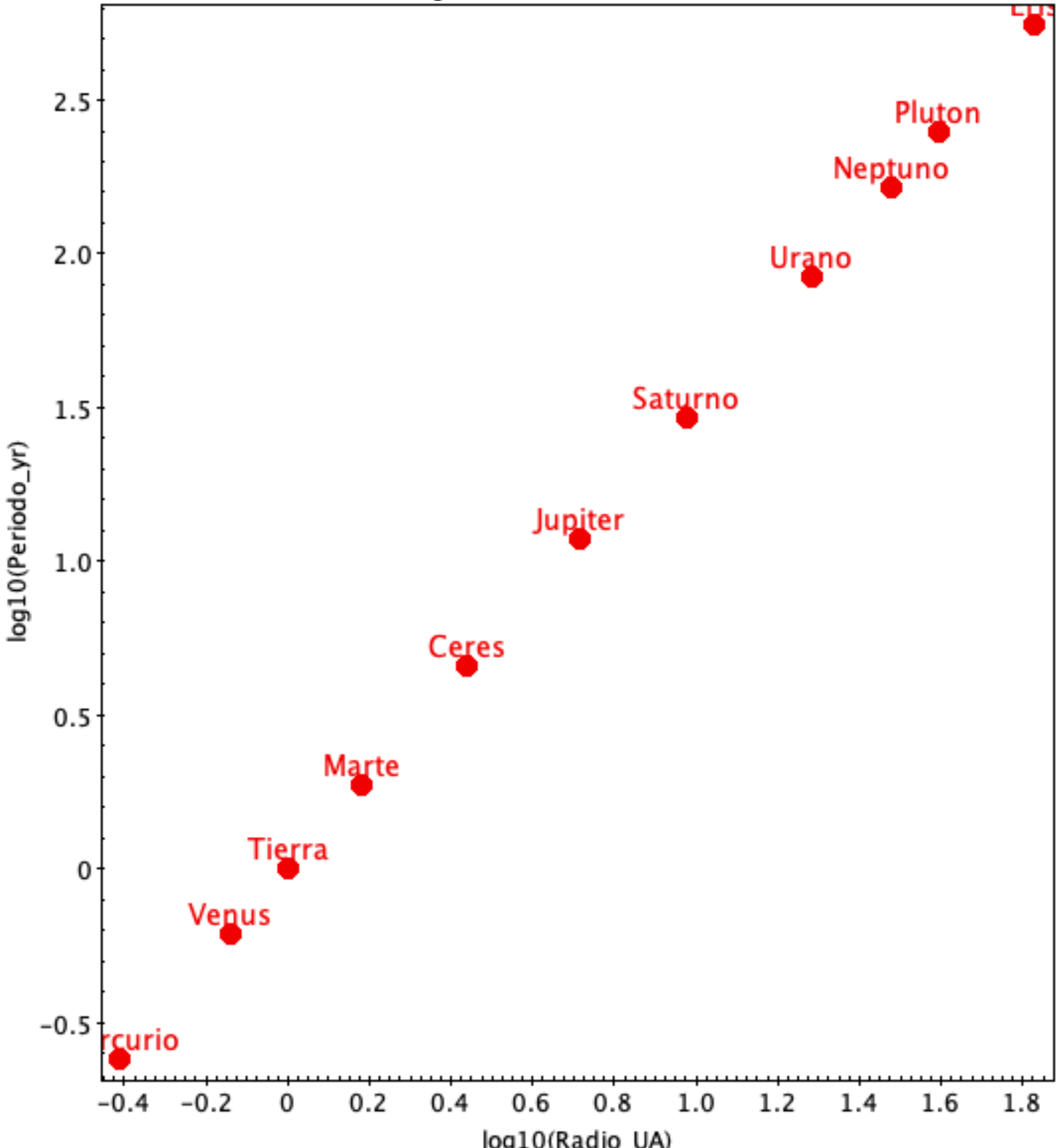
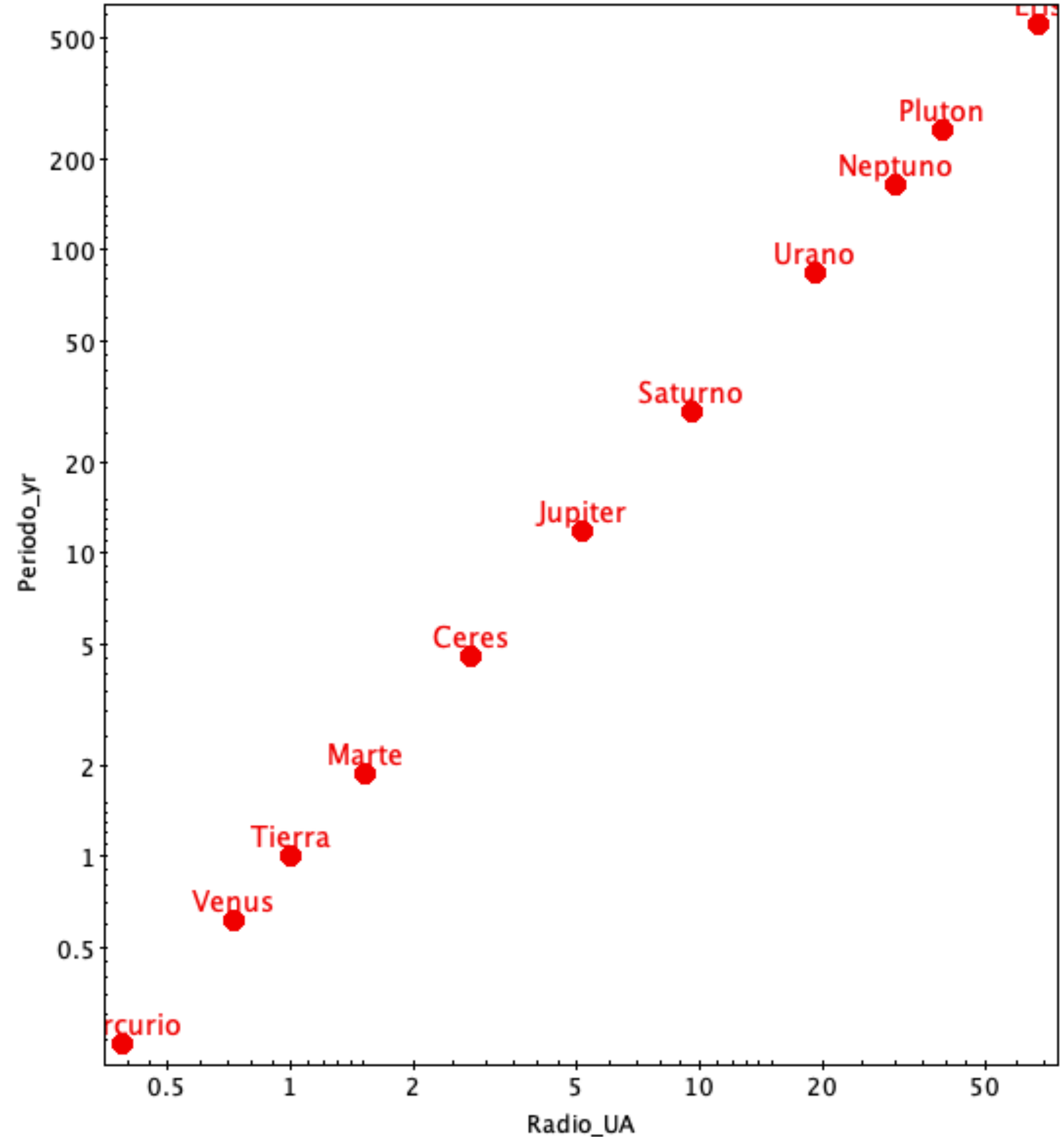


Grafico en escala logarítmica
de las variables



Equiespaciados en logaritmo, es decir en
potencias de 10

Gráficos log-log

$$\log P = +\frac{3}{2}\log a$$

Grafico en escala lineal
del log de las variables

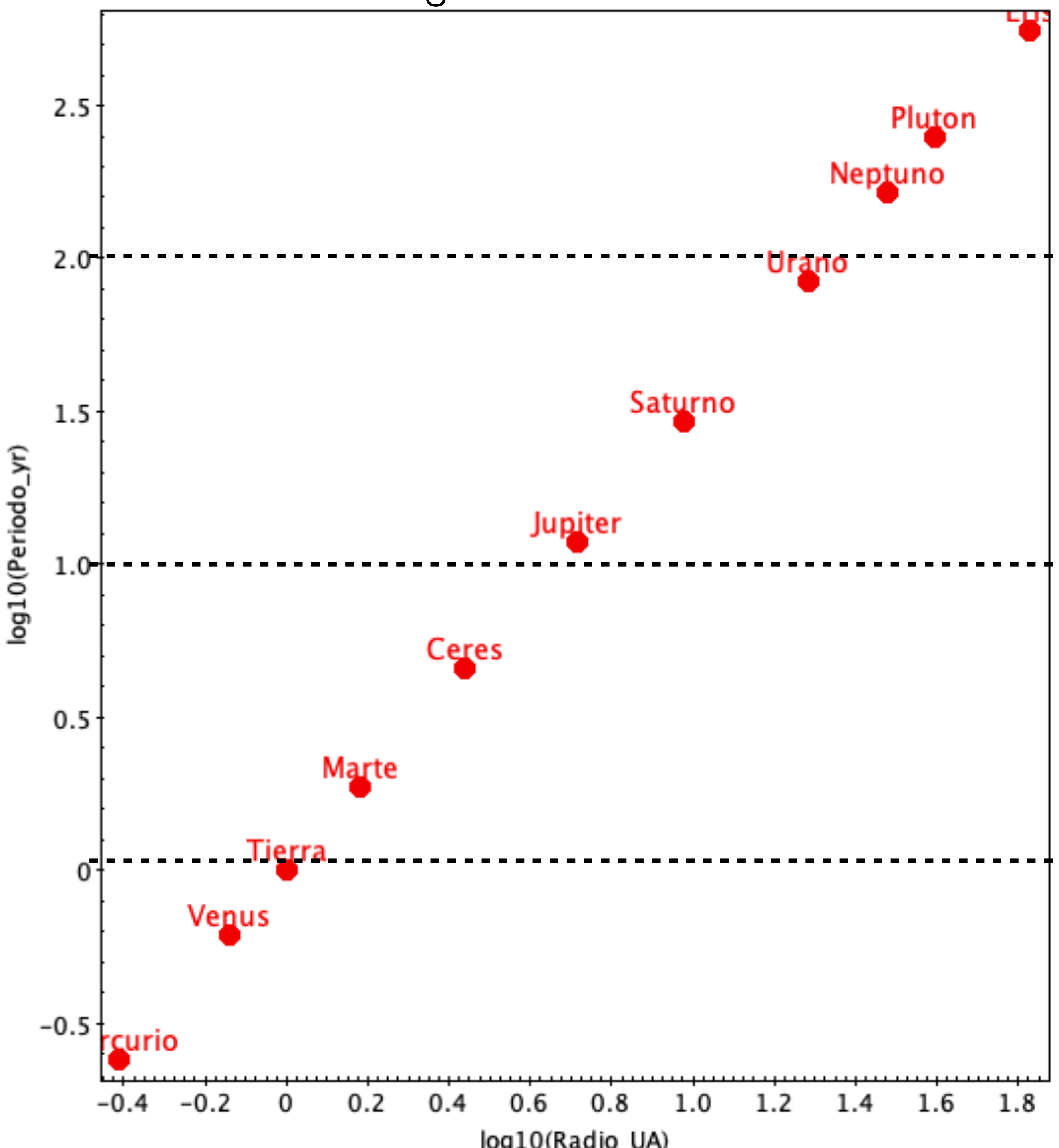
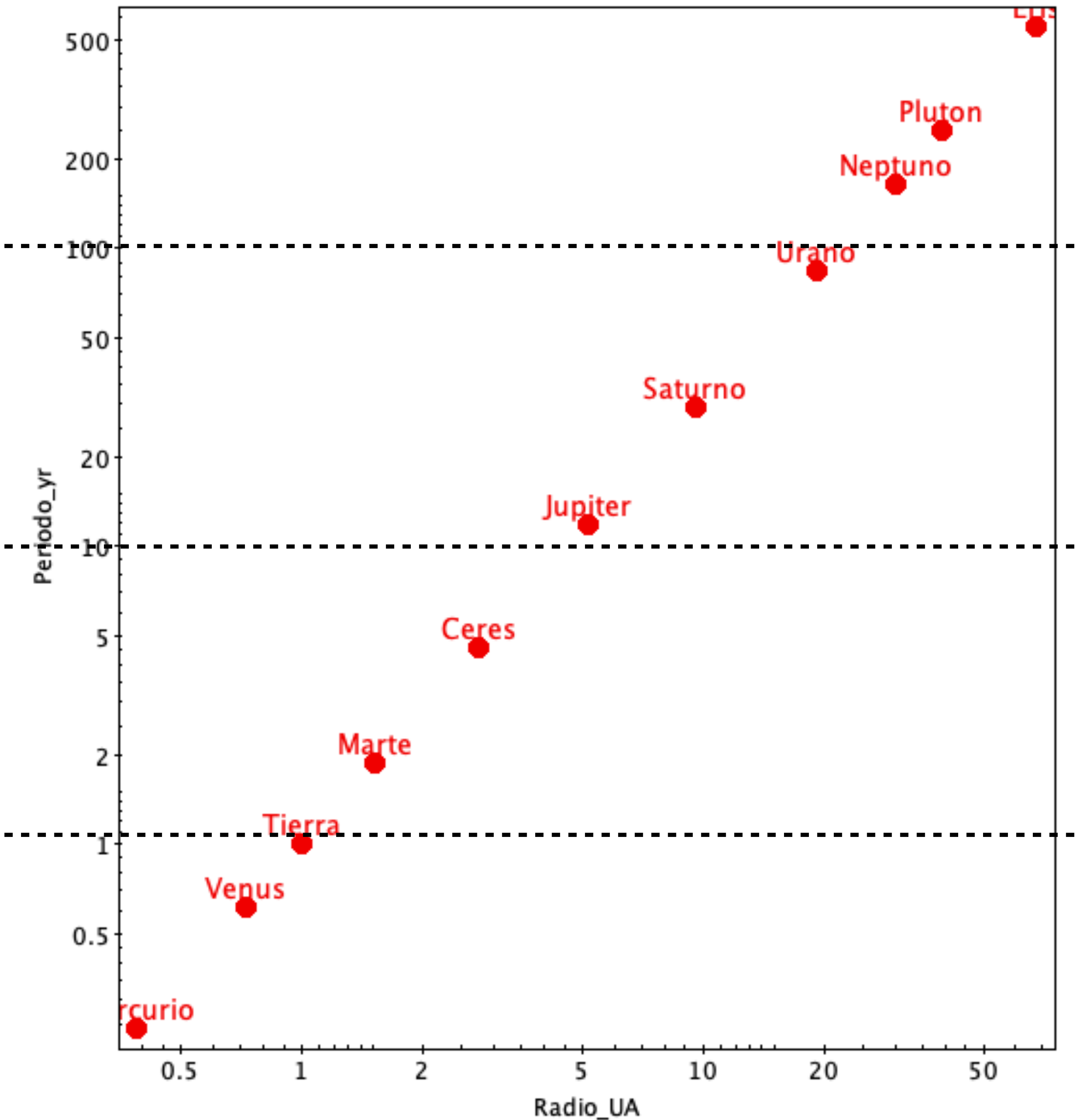


Grafico en escala logarítmica
de las variables



Equiespaciados en logaritmo, es decir en
potencias de 10

Un gráfico conocido que es inherentemente log-log

Diagrama H-R
(Luminosidad vs Teff)

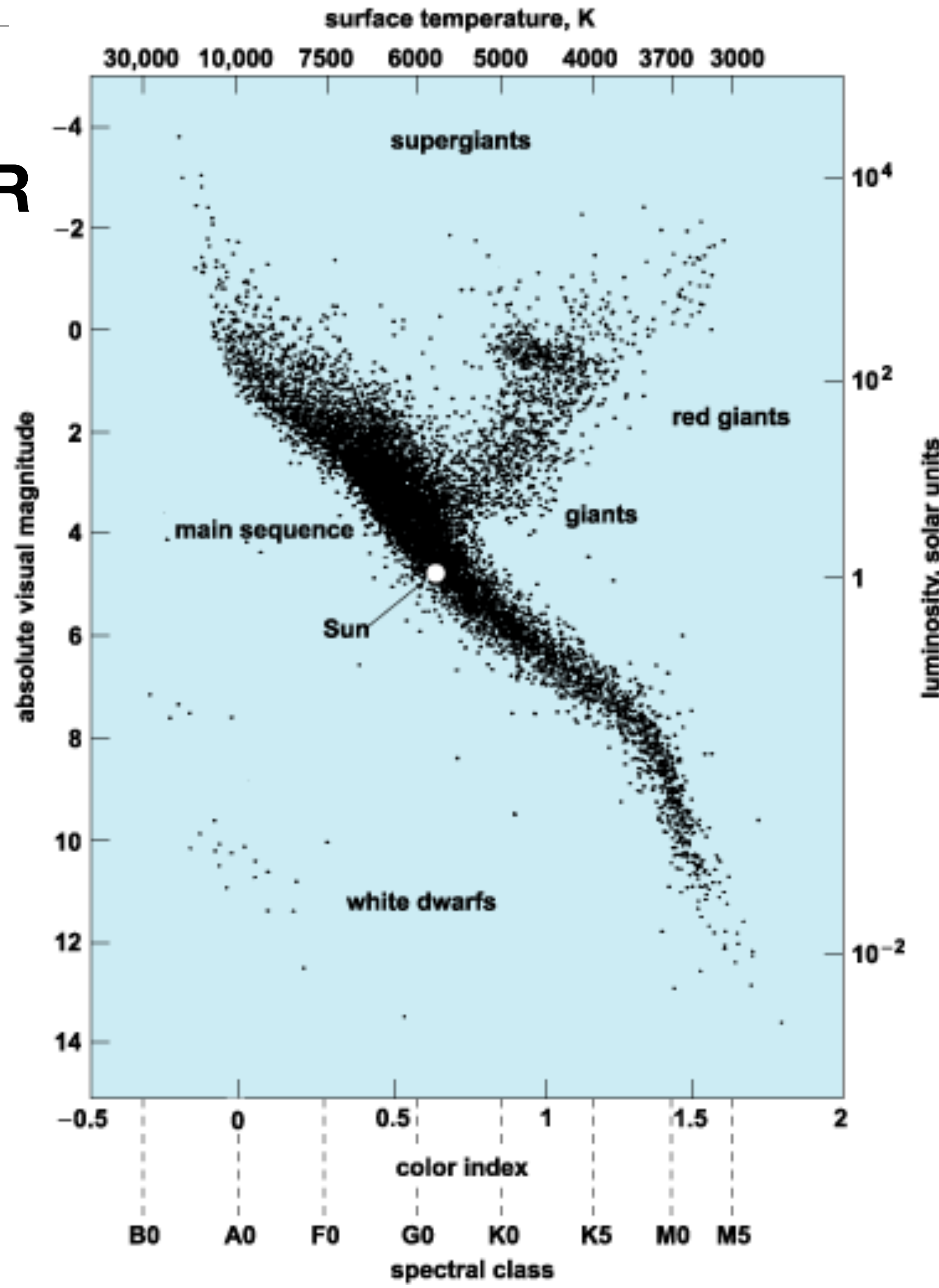
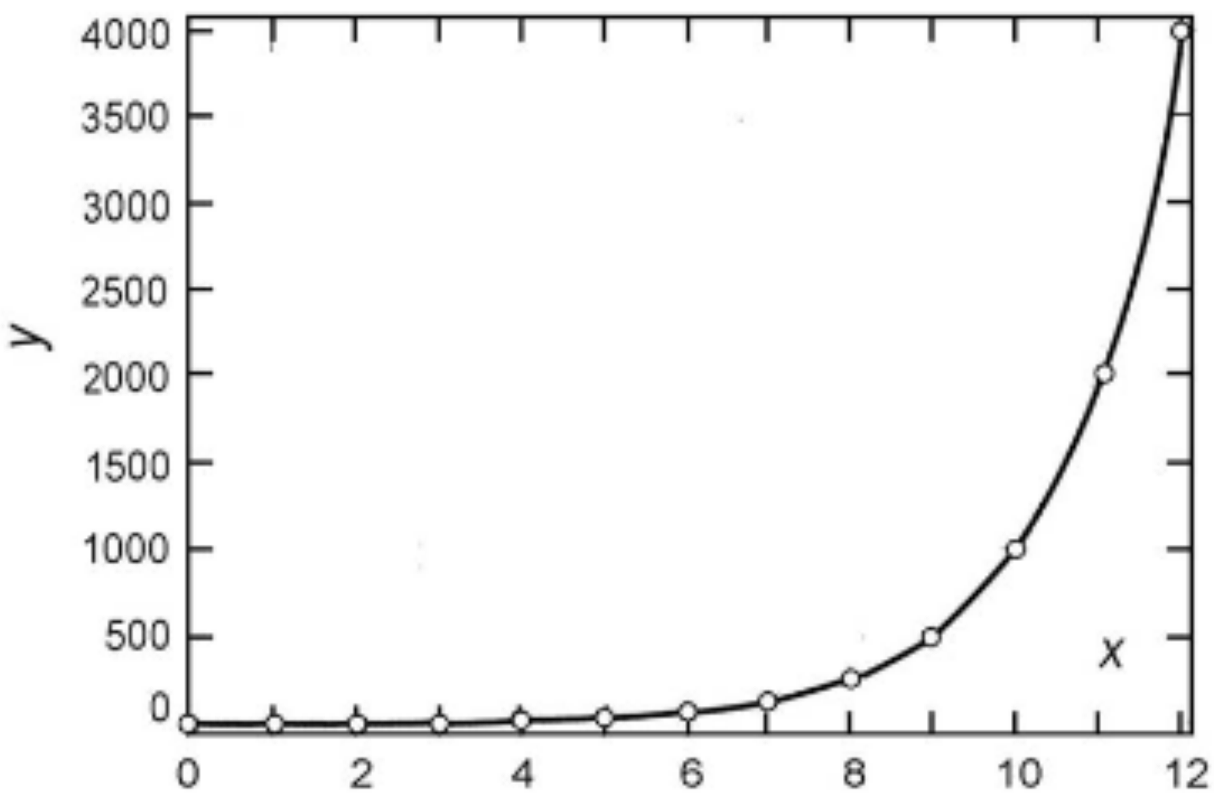


Diagrama Color-Magnitud
(Teff->Color, Lum->Mag)

Gráficos semi-log

- Cuando sólo una de las variables (x o y) se grafica en escala logarítmica el gráfico es semi-log

- Útil por ejemplo para funciones exponenciales o potenciales del tipo $y = A10^{Bx}$



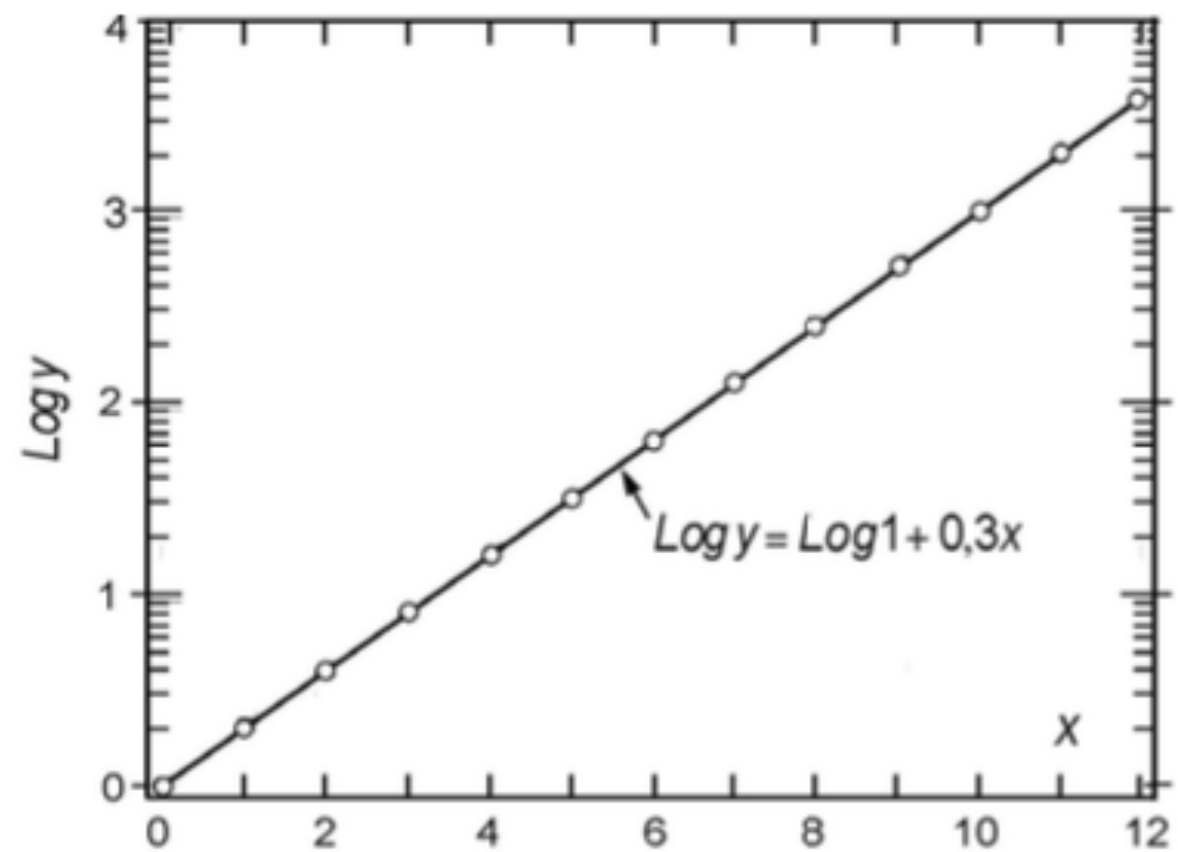


Fig. 6: Gráfico semilogarítmico o semi-log.

$$\underline{\log y} = \log A + \underline{Bx}$$

Bibliografía

- Errores:
    - Cap 1: Guía de Laboratorio de Física I - Universidad Simón Bolívar
- Gráficos:
    - Cap 4: Guía de Laboratorio de Física I - Universidad Simón Bolívar